Logika Matematyczna 16–17

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Semantyka KRP (2)

Plan na dziś

Klasyczny Rachunek Predykatów wyznacza pewien standard logiczny. Rozumiemy przez to m.in. dwie rzeczy:

- ważne teorie naukowe formułowane są w języku KRP (lub mogą zostać „przetłumaczone” na język KRP);
- argumentacje przeprowadzane w językach etnicznych mogą być rekonstruowane w KRP.

Podamy aksjomatyki dwóch ważnych teorii elementarnych:

- *teorii mnogości Zermelo-Fraenkla*
- *teorii algebr Boole'a*.

Uwaga. Słuchacze tego wykładu mają za sobą kurs **Wstępu do Matematyki**, podczas którego wiele mówiono o zbiorach i relacjach.

Plan na dziś

Są to teorie fundamentalne dla wielu działów matematyki. Całą współczesną matematykę można ugruntować na bazie teorii mnogości. Z kolei, algebry Boole'a (i inne, podobne do nich struktury) są nie tylko bardzo ważnym rodzajem struktur algebraicznych, ale również znajdują wszechobecne zastosowania (np. w ***każdym*** komputerze „pracuje" algebra Boole'a bramek logicznych).

Teoria mnogości jest także zakładana w ***metajęzyku***, w którym mówimy o systemach logicznych, w tym oczywiście także o KRZ oraz KRP.

W ostatniej części niniejszej prezentacji podamy garstkę uwag o związkach między językiem KRP a językami etnicznymi.

Aksjomatyka teorii mnogości ZF

Aksjomat ekstensjonalności:
$\forall x \forall y \, (\forall z \, (z \in x \equiv z \in y) \rightarrow x = y)$
Ten aksjomat stwierdza, że każdy zbiór jest jednoznacznie wyznaczony poprzez swoje elementy.

Aksjomat pary:
$\forall x \forall y \exists z \forall u \, (u \in z \equiv (u = x \vee u = y))$
To aksjomat gwarantujący istnienie pary nieuporządkowanej.

Aksjomat sumy:
$\forall x \exists y \forall z \, (z \in y \equiv \exists u \, (z \in u \wedge u \in x))$
Aksjomat ten gwarantuje istnienie sumy dowolnej rodziny zbiorów.

Aksjomat zbioru potęgowego:
$\forall x \exists y \forall z \, (z \in y \equiv \forall u (u \in z \rightarrow u \in x))$
Na mocy tego aksjomatu, dla dowolnego zbioru istnieje zbiór złożony dokładnie ze wszystkich jego podzbiorów.

Schemat wyróżniania:
$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \forall y \exists z \forall u\, (u \in z \equiv (u \in y \wedge \varphi(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)))$
gdzie φ jest formułą języka teorii mnogości ZF taką, że z nie jest zmienną wolną w φ, zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są zmiennymi wolnymi formuły φ innymi niż u.

Schemat wyróżniania pozwala z elementów danego wprzódy zbioru utworzyć jego podzbiór, złożony z tych elementów, które mają jakąś własność, wyrażalną w języku (pierwszego rzędu) teorii mnogości.
Mamy tu do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale właśnie ze schematem nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomat nieskończoności:
$\exists x\, (\exists y\, (y \in x \wedge \neg \exists z\, (z \in y)) \wedge \forall y\, (y \in x \rightarrow \forall z (\forall u\, (u \in z \equiv u = y) \rightarrow z \in x)))$
Ten aksjomat stwierdza istnienie (co najmniej jednego) zbioru nieskończonego. Uwaga: to jedyny aksjomat egzystencjalny w tej teorii mnogości.

Schemat zastępowania:

$\forall u(\forall x \forall y \forall z\, (x \in u \wedge \varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \exists w \forall v\, (v \in w \equiv \exists x\, (x \in u \wedge \varphi(x, v))))$

Schemat ten gwarantuje, intuicyjnie mówiąc, że obraz dowolnego zbioru względem jakiejkolwiek funkcji (opisywalnej formułą języka teorii mnogości) także jest zbiorem.

Tu również mamy do czynienia nie z jednym aksjomatem, ale ze schematem nieskończenie wielu aksjomatów.

Aksjomat ufundowania:

$\forall x(\exists u\, (u \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \forall z\, (z \in y \rightarrow \neg z \in x)))$

Aksjomat ufundowania wyklucza istnienie nieskończonych $\in$-zstępujących ciągów zbiorów, tj. takich ciągów $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \rangle$, że:

$$x_2 \in x_1,\ x_3 \in x_2,\ x_4 \in x_3, \ldots$$

Gdy do tego systemu dołączyć **Aksjomat wyboru**:
$\forall x((\forall y\ (y \in x \to \exists z\ (z \in y)) \wedge \forall y \forall u\ ((y \in x \wedge u \in x) \to y = u \vee \neg \exists v\ (v \in y \wedge v \in u))) \to \exists w(\forall y\ (y \in x \to \exists z\ ((z \in y \wedge z \in w) \wedge \forall v\ ((v \in y \wedge v \in w) \to v = z)))))$
To otrzymamy system teorii mnogości nazywany **ZFC**.

Uwaga. Do aksjomatyki teorii ZF należą także **aksjomaty dla identyczności**:

- $\forall x\ (x = x)$
- $\forall x \forall y\ (x = y \to y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \wedge y = z) \to x = z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \wedge x \in z) \to y \in z)$;
- $\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \wedge z \in x) \to z \in y)$.

Uwaga. Używane tu (np. w schematach wyróżniania i zastępowania) terminy: nieskończony i przeliczalny należą do metajęzyka.

Teoria algebr Boole'a

Znajdowanie analogii między różnymi twierdzeniami to szczególna umiejętność. Jeszcze ciekawsza jest umiejętność znajdowania analogii między różnymi analogiami, jak twierdzą matematycy. Możesz posiąść tę umiejętność, nawet na (stosunkowo niskim) poziomie elementarza logicznego. Z pewnością zauważyłaś, że jest odpowiedniość między pewnymi prawami KRZ a niektórymi prawami rachunku zbiorów.

Dla teorii algebr Boole'a podać można różne (równoważne) aksjomatyki. Ograniczymy się do dwóch aksjomatyk oraz jednej definicji algebr Boole'a (przez częściowe porządki).

Uwaga. Poniżej celowo nie używamy notacji standardowej.

Teoria algebr Boole'a: pierwsza aksjomatyka

W pierwszym ujęciu, język teorii algebr Boole'a jest językiem KRP z identycznością oraz:

- symbolem funkcyjnym dwuargumentowym $\boxplus$, nazywającym *kres górny* (swoich argumentów);
- symbolem funkcyjnym dwuargumentowym $\boxtimes$, nazywającym *kres dolny* (swoich argumentów);
- symbolem funkcyjnym jednoargumentowym $\boxminus$, nazywającym *dopełnienie* (swojego argumentu);

Teoria algebr Boole'a: pierwsza aksjomatyka

Aksjomaty identyczności dla symboli $\boxplus$, $\boxtimes$, $\boxminus$, $\triangledown$ oraz $\vartriangle$:

- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxplus(x, z) = \boxplus(y, z))$
- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxtimes(x, z) = \boxtimes(y, z))$
- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxplus(z, x) = \boxplus(z, y))$
- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxtimes(z, x) = \boxtimes(z, y))$
- $\forall x \forall y\ (x = y \rightarrow \boxminus(x) = \boxminus(y))$.

Teoria algebr Boole'a: pierwsza aksjomatyka

Aksjomaty specyficzne teorii algebr Boole'a:

- B_1^1: $\forall x \forall y\ (\boxplus(x, y) = \boxplus(y, x))$
- B_2^1: $\forall x \forall y\ (\boxtimes(x, y) = \boxtimes(y, x))$
- B_3^1: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxplus(x, \boxplus(y, z)) = \boxplus(\boxplus(x, y), z))$
- B_4^1: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxtimes(x, \boxtimes(y, z)) = \boxtimes(\boxtimes(x, y), z))$
- B_5^1: $\forall x \forall y\ (\boxplus(\boxtimes(x, y), y) = y)$
- B_6^1: $\forall x \forall y\ (\boxtimes(\boxplus(x, y), y) = y)$
- B_7^1: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxplus(x, \boxtimes(y, z)) = \boxtimes(\boxplus(x, y), \boxplus(x, z)))$
- B_8^1: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxtimes(x, \boxplus(y, z)) = \boxplus(\boxtimes(x, y), \boxtimes(x, z)))$
- B_9^1: $\forall x \forall y\ (\boxplus(\boxtimes(x, \boxminus(x)), y) = y)$
- B_{10}^1: $\forall x \forall y\ (\boxtimes(\boxplus(x, \boxminus(x)), y) = y)$.

Teoria algebr Boole'a: pierwsza aksjomatyka

Prostymi konsekwencjami tych aksjomatów są np.:

- $\forall x\ (\boxplus(x,x) = x)$
- $\forall x\ (\boxtimes(x,x) = x)$
- $\forall x \forall y\ ((\boxplus(x,y) = \boxplus(x, \boxminus(x)) \wedge \boxtimes(x,y) = \boxtimes(x, \boxtimes(x))) \rightarrow y = \boxminus(x))$.

Niech ich wyprowadzenia będą ćwiczeniem. Jako wskazówkę podajemy ciąg równości dla pierwszych dwóch rozważanych wyżej przypadków:

$$x = \boxplus(x, \boxtimes(x,y)) = \boxtimes(\boxplus(x,x), \boxplus(x,y)) =$$
$$\boxplus(\boxtimes(x, \boxplus(x,y)), \boxtimes(x, \boxplus(x,y))) = \boxplus(x,x)$$

$$x = \boxtimes(x, \boxplus(x,y)) = \boxplus(\boxtimes(x,x), \boxtimes(x,y)) =$$
$$\boxtimes(\boxplus(x, \boxtimes(x,y)), \boxplus(x, \boxtimes(x,y))) = \boxtimes(x,x).$$

Teoria algebr Boole'a: druga aksjomatyka

W drugim ujęciu, język teorii algebr Boole'a jest językiem KRP z identycznością oraz:

- symbolem funkcyjnym dwuargumentowym $\boxplus$, nazywającym *kres górny* (swoich argumentów);
- symbolem funkcyjnym dwuargumentowym $\boxtimes$, nazywającym *kres dolny* (swoich argumentów);
- symbolem funkcyjnym jednoargumentowym $\boxminus$, nazywającym *dopełnienie* (swojego argumentu);
- stałą indywiduową $\triangledown$, nazywającą *jedynkę* (element największy) algebry;
- stałą indywiduową $\vartriangle$, nazywającą *zero* (element najmniejszy) algebry.

Teoria algebr Boole'a: druga aksjomatyka

Aksjomaty identyczności dla symboli $\boxplus$, $\boxtimes$, $\boxminus$, $\triangledown$ oraz $\vartriangle$:

- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxplus(x, z) = \boxplus(y, z))$
- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxtimes(x, z) = \boxtimes(y, z))$
- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxplus(z, x) = \boxplus(z, y))$
- $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \rightarrow \boxtimes(z, x) = \boxtimes(z, y))$
- $\forall x \forall y\ (x = y \rightarrow \boxminus(x) = \boxminus(y))$.

Uwaga. Naprawdę potrzebne są tylko dwa pierwsze z tych aksjomatów. Pozostałe można wyprowadzić z innych aksjomatów teorii algebr Boole'a.

Teoria algebr Boole'a: druga aksjomatyka

Aksjomaty specyficzne teorii algebr Boole'a:

- B_2^1: $\forall x\ (\boxplus(x,\vartriangle) = x)$
- B_2^2: $\forall x\ (\boxtimes(x,\triangledown) = x)$
- B_2^3: $\forall x\ (\boxplus(x,\boxminus(x)) = \triangledown)$
- B_2^4: $\forall x\ (\boxtimes(x,\boxminus(x)) = \vartriangle)$
- B_2^5: $\forall x \forall y\ (\boxplus(x,y) = \boxplus(y,x))$
- B_2^6: $\forall x \forall y\ (\boxtimes(x,y) = \boxtimes(y,x))$
- B_2^7: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxplus(x,\boxtimes(y,z)) = \boxtimes(\boxplus(x,y),\boxplus(x,z)))$
- B_2^8: $\forall x \forall y \forall z\ (\boxtimes(x,\boxplus(y,z)) = \boxplus(\boxtimes(x,y),\boxtimes(x,z)))$.

Teoria algebr Boole'a: definicja przez częściowe porządki

Niech U będzie dowolnym zbiorem uporządkowanym częściowo przez relację $\prec$. Przypominamy, że dla dowolnego zbioru $A \subseteq U$:

- element $a \in A$ nazywamy *elementem maksymalnym* w A, jeśli zachodzi implikacja: $\forall x \, ((x \in a \wedge x \prec a) \rightarrow x = a)$;
- element $a \in A$ nazywamy *elementem minimalnym* w A, jeśli zachodzi implikacja: $\forall x \, ((x \in a \wedge a \prec x) \rightarrow x = a)$;
- element $a \in A$ nazywamy *elementem największym* w A, jeśli $x \prec a$ dla wszystkich $x \in A$;
- element $a \in A$ nazywamy *elementem najmniejszym* w A, jeśli $a \prec x$ dla wszystkich $x \in A$;

Teoria algebr Boole'a: definicja przez częściowe porządki

- element $a \in U$ jest *ograniczeniem górnym* zbioru A, jeśli $x \prec a$ dla wszystkich $x \in A$;
- element $a \in U$ jest *ograniczeniem dolnym* zbioru A, jeśli $a \prec x$ dla wszystkich $x \in A$;
- element $a \in U$ jest *kresem górnym* zbioru A, jeśli a jest elementem najmniejszym zbioru wszystkich ograniczeń górnych zbioru A;
- element $a \in U$ jest *kresem dolnym* zbioru A, jeśli a jest elementem największym zbioru wszystkich ograniczeń dolnych zbioru A.

Teoria algebr Boole'a: definicja przez częściowe porządki

Mówimy, że $\langle U, \prec\rangle$ jest ***kratą***, jeśli dla dowolnych elementów $x, y \in U$ istnieją: kres górny oraz kres dolny zbioru $\{x, y\}$. Ponieważ elementy te są wyznaczone jednoznacznie, więc możemy przyjąć oznaczenia:

- $\boxtimes(x, y)$ — dla kresu dolnego zbioru $\{x, y\}$;
- $\boxplus(x, y)$ — dla kresu górnego zbioru $\{x, y\}$.

Krata $\langle U, \prec\rangle$ jest ***dystrybutywna***, jeśli dla dowolnych $x, y, z \in U$ zachodzą warunki:

- $\forall x \forall y \forall z \ \boxplus(x, \boxtimes(y, z)) = \boxtimes(\boxplus(x, y), \boxplus(x, z))$
- $\forall x \forall y \forall z \ \boxtimes(x, \boxplus(y, z)) = \boxplus(\boxtimes(x, y), \boxtimes(x, z))$.

Teoria algebr Boole'a: definicja przez częściowe porządki

Kratę dystrybutywną $\langle U, \prec \rangle$ nazywamy ***algebrą Boole'a***, jeśli dla dowolnego elementu $x \in U$ istnieje jego *dopełnienie*, tj. element $\boxminus(x)$ spełniający warunki:

- $\forall x \forall y \ \boxplus(\boxtimes(x, \boxminus(x)), y) = y$
- $\forall x \forall y \ \boxtimes(\boxplus(x, \boxminus(x)), y) = y$.

Z każdego z podanych wyżej układów aksjomatów dla teorii algebr Boole'a można wywieść wszystkie warunki charakteryzujące algebry Boole'a jako określone przed chwilą struktury uporządkowane, a także na odwrót: z charakterystyki porządkowej algebr Boole'a można wyprowadzić każdą z omawianych wcześniej aksjomatyk.

Teoria algebr Boole'a: definicja przez częściowe porządki

Uwaga o standardowej notacji. Dla operacji w algebrach Boole'a używa się zwykle standardowych oznaczeń:

- $\cup$ — dla kresu górnego (także: $\vee$);
- $\cap$ — dla kresu dolnego (także: $\wedge$);
- $-$ — dla operacji dopełnienia (także: $'$).

Powyżej celowo nie używaliśmy standardowej notacji. Niech będzie prostym ćwiczeniem zapisanie podanych aksjomatyk teorii algebr Boole'a w notacjach standardowych. Wykonanie tego ćwiczenia nagrodzone zostanie **Iluminacją**: stwierdzisz, że przecież gdzieś już to widziałaś!

Teoria algebr Boole'a: przykłady

Przykłady algebr Boole'a.

- Wszystkie ***podzbiory dowolnego zbioru*** U wraz z operacjami teoriomnogościowymi: sumy (kres górny), iloczynu (kres dolny), dopełnienia (do U), zbiorem U jako jedynką oraz zbiorem pustym $\emptyset$ jako zerem tworzą algebrę Boole'a.
- **Algebra wartości logicznych.** Tabliczki prawdziwościowe funktorów odpowiadających spójnikom zdaniowym pokazują, że w zbiorze wartości logicznych $\{0, 1\}$ można wprowadzić strukturę algebry Boole'a. Zerem tej algebry jest 0, jej jedynką jest 1. Kres dolny odpowiada koniunkcji, kres górny alternatywie (nierozłącznej), a operacja dopełnienia odpowiada negacji.

Teoria algebr Boole'a: przykłady

- **Algebra zdarzeń.** Przestrzeń zdarzeń jest algebrą Boole'a. Jest to, rzecz jasna, szczególny przypadek pierwszego z rozważanych przykładów. Zdarzenia są zbiorami (zdarzeń elementarnych), a koniunkcji i alternatywie zdarzeń odpowiadają operacje teoriomnogościowe na zbiorach zdarzeń elementarnych; zdarzeniu przeciwnemu do danego zdarzenia odpowiada dopełnienie teoriomnogościowe tego zdarzenia.
- **Kraty pojęć.** Ten przykład wykorzystuje kilka pojęć algebraicznych, których tu nie objaśniamy. Jest on przeznaczony dla tych czytelniczek, które są już trochę oswojone z algebrą, lub też takich, które — zżerane zdrową ambicją — zechcą odnaleźć owe pojęcia w jakimś podręczniku. Dodajmy, że algebry z tego przykładu mają ciekawe zastosowania, także lingwistyczne — np. w opisie zależności semantycznych w leksykonie.

Teoria algebr Boole'a: przykłady

Kontekstem nazwiemy dowolny układ postaci (G, M, I), gdzie G (ogół rozważanych obiektów) i M (ogół rozważanych cech) są zbiorami, a I relacją o dziedzinie G oraz przeciwdziedzinie M. Wyrażenie gIm czytajmy: obiekt g ma cechę m. Można czynić dalsze założenia o tego typu układach; w tym miejscu przywoływanie ich jest nieistotne. Zdefiniujmy dwa operatory na rodzinach zbiorów obiektów i cech:

$\rhd(A) = \{m \in M \ : \ (\forall g)\ [g \in A \rightarrow gIm]\}$

$\lhd(B) = \{g \in G \ : \ (\forall m)\ [m \in B \rightarrow gIm]\}$.

Para $(\rhd, \lhd)$ jest odpowiedniością Galois.

Dla dowolnego kontekstu (G, M, I) nazwiemy ***pojęciem formalnym*** tego kontekstu każdą parę (A, B) taką, że:

$$A \subseteq G, \ B \subseteq M, \ \rhd(A) = B, \ \lhd(B) = A.$$

Teoria algebr Boole'a: przykłady

Ekstensją pojęcia formalnego (A, B) jest A, jego ***intensją*** jest B. Rodzinę wszystkich pojęć formalnych kontekstu (G, M, I) oznaczmy przez $\mathfrak{B}(G, M, I)$. Rodzina ta jest częściowo uporządkowana przez relację $\prec$: $(A_1, B_1) \prec (A_2, B_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1 \subseteq A_2$.
(Co jest równoważne temu, że $B_2 \subseteq B_1$.)
Podstawowe dla rozważanej problematyki twierdzenie wysłowić można następująco (zob. Bernhard Ganter, Rudolf Wille *Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1999, str. 20; upraszczam nieco notację; wszystkie potrzebne do zrozumienia twierdzenia pojęcia znaleźć można w dowolnym solidnym podręczniku teorii krat; stosujemy też standardowe niedomówienia algebraiczne):

Teoria algebr Boole'a: przykłady

Twierdzenie.

Krata pojęć $\mathfrak{B}(G, M, I)$ jest kratą zupełną, w której kresy zdefiniowane są równościami:

$$\bigwedge_{t \in T} (A_t, B_t) = (\bigcap_{t \in T} A_t, \rhd(\lhd(\bigcup_{t \in T} B_t)))$$

$$\bigvee_{t \in T} (A_t, B_t) = (\lhd(\rhd(\bigcup_{t \in T} A_t)), \bigcap_{t \in T} B_t).$$

Krata zupełna $\boldsymbol{V}$ jest izomorficzna z $\mathfrak{B}(G, M, I)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją odwzorowania $\gamma : G \to V$ oraz $\mu : M \to V$ takie, że $\gamma(G)$ jest supremum-gęsty w $\boldsymbol{V}$, $\mu(M)$ jest infimum-gęsty w $\boldsymbol{V}$ oraz gIm jest równoważne z $\gamma g \leqslant \mu m$ dla wszystkich $g \in G$ i wszystkich $m \in M$. W szczególności, $\boldsymbol{V} \cong \mathfrak{B}(V, V, \leqslant)$. Mamy tu oczywiście: $\boldsymbol{V} = (V, \leqslant)$.

Język KRP a języki etniczne

Czy „przekłady” z języka KRP na języki etniczne (i na odwrót) są możliwe? A jeśli niemożliwe są wierne, „globalne” przekłady, to jaka część języka etnicznego ma swój przekład na język KRP? Poniżej ograniczymy się tylko do bardzo ogólnych uwag dotyczących zależności między językiem KRP a językami etnicznymi. Będą to przy tym uwagi raczej dogmatyczne. Więcej na ten temat: np. w wykładzie **Semiotyka Logiczna** przewidzianym w programie studiów **Językoznawstwa i Nauk o Informacji** na roku czwartym.

Języki etniczne są uniwersalnymi systemami semiotycznymi. Wszystko, co daje się wyrazić, jest wyrażalne w językach etnicznych. Pomijając niuanse gramatyczne oraz zasoby słownikowe (które zawsze można uzupełniać), wszystkie języki etniczne są zasadniczo ***równoważne***, jeśli chodzi o treści w nich wyrażalne.

Język KRP a języki etniczne

Język Klasycznego Rachunku Zdań jest tworem o wiele młodszym niż poszczególne języki etniczne — liczy sobie zaledwie dwa i pół tysiąca lat. Z kolei, język Klasycznego Rachunku Predykatów liczy sobie niewiele więcej niż sto lat. Inspiracje do zbudowania języka KRP były po części logiczne, po części matematyczne.

Język KRP nadaje się do „mówienia" o bardzo szerokiej klasie struktur: o układach złożonych z ***dowolnego*** zbioru przedmiotów oraz określonych między tymi przedmiotami relacjach. Dla większości zastosowań, język KRP (a więc także jego dobrze określona semantyka) jest całkowicie wystarczający. W szczególności, ponieważ w języku tym sformułować można teorię mnogości (która stanowi podstawę dla całej matematyki), znakomita większość rozważań matematycznych jest wyrażalna w (stosownych fragmentach) języka KRP.

Język KRP a języki etniczne

Czasami podkreśla się fakt, że formalizacja klasycznego pojęcia prawdy (podana przez Tarskiego, w terminach relacji spełniania omówionej wyżej) nie jest adekwatna np. dla zdań z różnego rodzaju modalnościami (aletycznymi, deontycznymi, epistemicznymi, itd.).

Tak oczywiście jest, należy jednak zwrócić uwagę, że dla każdej z odpowiednich logik nieklasycznych (np. modalnych) formułuje się dobrze określone pojęcie spełniania i prawdy. Przy tym, w metajęzyku opisu korzysta się z teorii mnogości, a więc także z KRP.

Podobne uwagi można sformułować pod adresem innych logik: np. wielowartościowych, temporalnych, itd.

Język KRP a języki etniczne

Zwraca się również uwagę, że wiele fenomenów języków etnicznych (np. okazjonalność, metafory, idiomy, wyrażenia abstrakcyjne wymagające kwantyfikacji wyższych rzędów, elipsa, supozycje, implikatury, performatywy, konstrukcje intensjonalne w ogólności, akty mowy, mowa zależna, itd.) wymyka się opisowi z bezpośrednim zastosowaniem semantyki KRP. Także w tych przypadkach, stosowne ujęcia metalogiczne korzystają jednak, w ostatecznym rozrachunku, z teorii mnogości oraz KRP.

Wreszcie, podkreśla się zasadniczą różnicę między językami etnicznymi a językami sztucznymi: w językach etnicznych nie występują w sposób wyraźny ***zmienne*** (zdaniowe lub nazwowe). Ten fakt jednak nie przesądza, iż ***przekłady*** z języków etnicznych na języki sztuczne (i na odwrót), zachowujące własności znaczeniowe, są niemożliwe. W istocie, istnieje wiele rozbudowanych systemów formalnych, w których takie przekłady się proponuje.

Język KRP a języki etniczne

Czyżby więc, mimo wszystkich tych (i ewentualnie dalszych) zastrzeżeń, istnienie ***globalnego*** „przekładu" wszelkich wyrażeń dowolnego języka etnicznego na język KRP, z zachowaniem wszystkich własności semantycznych, było przesądzone? Sądzimy, że nie. Tylko wybrane rodzaje wyrażeń (zdań) języków etnicznych można „rozumnie" przekładać na język KRP. Aby taki przekład był sensowny, muszą być spełnione, m.in. następujące warunki:

- rozważane wyrażenia muszą mieć porządnie określone ***kategorie syntaktyczne*** (odpowiadające predykatom, nazwom, funktorom różnych rodzajów);
- trzeba się ograniczyć jedynie do funkcji ***informacyjnej*** (deskryptywnej) wyrażeń, pomijając (pierwszorzędowe w przypadku języków etnicznych) funkcje ***pragmatyczne***, np. funkcję ***perswazyjną***;
- należy się ograniczyć do wyrażeń, a nie ***wypowiedzi***, w przypadku tych drugich istotną rolę odgrywają ich ***konteksty***, a to zmusza do wykroczenia poza klasyczne (w terminach relacji spełniania dla KRP) rozumienie prawdziwości.

Język KRP a języki etniczne

„Przekłady" w drugą stronę (tj. z języka KRP na języki etniczne) są oczywiście o wiele łatwiejsze. Jednak również w tym przypadku napotykamy na pewne trudności („przekłady" pewnych kontrukcji logicznych źle „współżyją" gramatycznie, jeśli użyć tej niejasnej metafory).

Tak więc, dla przykładu, nie sprawia najmniejszych trudności dokonanie „przekładu" z języka polskiego na język KRP zdań poniższej postaci, w których jest jasne, co przełoży się na predykat, co na nazwę, z jakimi rodzajami kwantyfikacji mamy do czynienia, itd.:

- Jan zdradził Klaudię z Cecylią.
- Z Kutna dokądkolwiek jest dalej niż z Paryża do najmniejszej wioski w Japonii.
- Wszyscy myślą tylko o sobie, tylko ja myślę o mnie.
- Kto śpi, nie grzeszy.

Język KRP a języki etniczne

Podobnie, nietrudno znaleźć różnice znaczeniowe w podanych niżej parach wyrażeń:

Umarł i dostał jakiś order.	Dostał jakiś order i umarł.
Umarł bo dostał jakiś order.	Dostał jakiś order bo umarł.
Umarł więc dostał jakiś order.	Dostał jakiś order więc umarł.
Umarł chociaż dostał jakiś order.	Dostał jakiś order chociaż umarł.
Umarł gdy dostał jakiś order.	Dostał jakiś order gdy umarł.
Umarł mimo że dostał jakiś order.	Dostał jakiś order mimo że umarł.
Umarł, a mimo to dostał jakiś order.	Dostał jakiś order, a mimo to umarł
Nie dość, że umarł, to dostał jakiś order.	Nie dość, że dostał jakiś order, to umarł.

Drobnym problemem może okazać się oddanie tych różnic znaczeniowych w „przekładach" tych wyrażeń na język KRP.

Język KRP a języki etniczne

Nie poświęcamy w tych wykładach specjalnej uwagi problemom znajdowania tego rodzaju przekładów z powodów, które zostały już przedstawione w semestrze zimowym: skoro otrzymałaś Świadectwo Dojrzałości, to należy przypuszczać, że sprawnie posługujesz się językiem polskim, w Czytaniu ze Zrozumieniem, analizie składniowej wypowiedzi, itd. Kto jednak łaknie tego typu ćwiczeń, znajdzie je w wielu powszechnie dostępnych podręcznikach i zbiorach zadań.

Pozwólmy sobie, dla relaksu, przywołać w tym miejscu garść wyrażeń o wymowie (w naszym mniemaniu) zabawnej. Komizm jest tu wynikiem różnorakich czynników, np.: błędów składniowych i semantycznych, elipsy, wieloznaczności, różnego rodzaju implikatur, itd. Można, dla rozrywki, próbować znaleźć „przekłady" podanych wyrażeń na język KRP.

Cytaty niepoważne

- Uwaga żołnierze! Zbiórka przed kościołem — za kościołem, po kościele — przed kościołem.
- Nad rzeką dziewczę doiło krowę, a w wodzie odbijało się odwrotnie.
- Jan zakopał skarb razem z teściową.
- Mimo starań lekarzy pacjent wyzdrowiał.
- Po wielu staraniach lekarzy pacjent zmarł.
- Popieramy program partii (tu wPiSz nazwę partii), oparty na przeświadczeniu o własnej słuszności.
- Cała wspólnota dziękuje chórowi parafialnemu, który na okres wakacji zaprzestał swojej działalności.
- Wieś była samowystarczalna: kobiety dostarczały mleka, mięsa i skór.
- Zachowanie dzieci dalece odbiega od rzeczywistości.
- Temperatura w kraju zależy od termometru.

Cytaty niepoważne

- Chory więzień nie dość, że nie był leczony, musiał jeszcze niekiedy umierać.
- Nie chcę, ale muszę.
- Mam swoje zdanie w tej sprawie, ale się z nim nie zgadzam.
- Kara śmierci ma charakter nieodwracalny.
- Na mordy carów państwa Europy patrzyły złym okiem.
- W XVI wieku uprawiano wiele roślin, których jeszcze nie znano.
- Dzięki seppuku Japończycy mogli pokazać swoje prawdziwe wnętrze.
- Emilia Plater była pułkownikiem o kobiecych piersiach widocznych spod munduru.
- Wietrzenie skał jest pojęciem czysto teoretycznym, bo wszystkie dawno wywietrzały.

Cytaty niepoważne

- Beethoven był głuchy, ale przynajmniej widział co komponował.
- Jontek na swoim zegarze w chałupie znalazł wskazówki do życia.
- Harfa jest podobna do łabędzia, tylko gorzej pływa.
- Jeśli podzielimy graniastosłup wzdłuż przekątnej podstawy, to otrzymamy dwie trumny.
- Prostokąt rożni się od kwadratu tym że raz jest wyższy, a raz szerszy.
- Przez uderzenia pędzlem malarz uzyskuje smutek na twarzy modelki.
- Gdyby stopniały lodowce, to Wielka Brytania byłaby cała zalana, a Polska chyba też, ale kilka dni później.
- Po bitwie na polu grunwaldzkim zostało więcej trupów niż przyszło.
- Polana jest to forma lasu bez lasu.
- Janko Muzykant ledwie zipał, ale zipał.

Cytaty niepoważne

- Po ogłoszeniu 10 przykazań Mojżesz uznał je za nieżyciowe i rzucił w przepaść.
- Kaj i Gerda nie byli ani siostrą ani bratem, tylko rodzeństwem.
- W puszczy żyje dużo drapieżników, które mogą człowieka pożreć, zadusić i zostawić.
- Całymi dniami pił po nocach.
- Na skutek żałoby swojej matki, Iwona urodziła się w pięć lat po śmierci ojca.
- Andromaka była wdową, jakiej wielu mężów mogło sobie życzyć.
- We wsi panowała ciemnota a także wójt.
- Autor w tym wierszu ukazuje nam swoje wnętrze i mówi, że jest mu niedobrze.
- Wiatr wiał tak silny, że powywracał dzwony na lewą stronę.

Cytaty niepoważne

- Ludzie pierwotni, gdy chcieli rozpalić ogień musieli pocierać krzemieniem o krzemień, a pod spód podkładali stare gazety.
- *Bogurodzica* śpiewana była często na rozpoczęcie bitwy pod Grunwaldem.
- Doprowadzimy do tego, że każdy w tym kraju będzie zarabiał więcej od średniej krajowej.
- „Ruchu nie ma" — rzekł Parmenides i odszedł.
- Nie znał zupełnie niczego.
- W moim zestawie pojęć nie ma pojęcia grzechu, a więc nie mogę grzeszyć.
- Przypuszczam, że sto lat temu nie było mnie (jeszcze/już) na świecie.
- Beata jest wierna wszystkim swoim narzeczonym.
- Nie ulegaj przesądom, bo to przynosi pecha.

Cytaty niepoważne

- Oskarżenie ministra okazało się bezpodstawne.
- Będzie tak dobrze, że gorzej już nie będzie.
- Wszyscy nie zapłacili.
- Doprowadzimy do tego, że każdy w tym kraju będzie robił to, na co ma ochotę. A jeśli nie, to go do tego zmusimy.
- Kobiety i mężczyźni mają takie same prawa przy podejmowaniu i rozwiązywaniu umowy o pracę.
- Wyjątek potwierdza regułę.
- Dzięki swemu kalectwu nie może biedak dostać pracy.
- Z okazji śmierci męża ślemy wyrazy głębokiego współczucia.
- W związku ze śmiercią mojej matki proszę o wypłacenie mi ekwiwalentu pieniężnego.
- Małżeństwo to zalegalizowana prostytucja.

Cytaty niepoważne

- Wolny jest ten, kto nie siedzi w więzieniu.
- Kapitał to ta część bogactwa, którą poświęca się, by pomnożyć swe bogactwo.
- Mąż stanu to polityk nieżyjący od piętnastu lat.
- Demokracja to ustrój, w którym możesz mówić to co myślisz, nawet wtedy, kiedy nie myślisz.
- Sprawiedliwe jest to, co leży w interesie silniejszego.
- Potrafię się oprzeć wszystkiemu, z wyjątkiem pokusy.
- Nietoperze są ssakami, bo nie mają piór. :)
- Założę się, że nie ma się o co zakładać.
- Jeśli zalegalizujemy eutanazję, to rozwiążemy problem braku pieniędzy na emerytury.
- Jeśli zalegalizujemy aborcję, to rozwiążemy problem przeludnienia.

Cytaty niepoważne

- Lepsze jutro było wczoraj.
- W teorii nie ma różnicy między teorią a praktyką. W praktyce jest.
- *Nie strzelajcie, towarzysze* — powiedział Majakowski na chwilę przed swoim urzędowo stwierdzonym samobójstwem.
- *Nie ma reguły bez wyjątków* jest regułą bez wyjątków.
- Raz ladacznica, zawsze ladacznica.
- Kiedy ktoś mówi, że chodzi o zasady, a nie o pieniądze, to wiadomo,że chodzi o pieniądze.
- Uczciwy polityk to ten, który, gdy raz został kupiony, pozostaje takim na zawsze.
- Ekonomista to ekspert, który będzie wiedział jutro, dlaczego rzeczy, które przepowiedział wczoraj, nie sprawdziły się dzisiaj.
- Zamiast wiary w pieniądze, inwestuj w wiarę.

Cytaty niepoważne

- Oddać życie za przekonania teologiczne jest najgorszym użytkiem, jakie człowiek może z życia uczynić.
- Pieniądze ma się po to, aby ich nie mieć.
- W piekle diabeł jest postacią pozytywną.
- Wiem, skąd legenda o bogactwie żydowskim. Żydzi płacą za wszystko.
- Pieniądze ułatwiają znoszenie ubóstwa.
- Polityka to bezkrwawa wojna, a wojna to polityka i rozlew krwi.
- W wolnym kraju każdy może wygłaszać własne zdanie i nikt nie musi tego słuchać.
- Istnieje cenzor, który cenzoruje teksty dokładnie tych autorów, którzy nie stosują autocenzury.

Cytaty niepoważne

- Piotr głosi nietolerancję dla tolerancji.
- Piotr głosi nietolerancję dla nietolerancji.
- Piotr głosi tolerancję dla nietolerancji.
- Piotr głosi tolerancję dla tolerancji.
- Meduza żyje w jelicie grubym człowieka, więc jest pożytecznym szkodnikiem.
- Słowacki na swoim pogrzebie widział tylko garstkę najbliższych przyjaciół.
- Spróchniały ząb czasu dotknął go swoim palcem.
- Towarzysz Oziębły jest członkiem wysuniętym z ramienia Partii na czoło.

Cytaty niepoważne

- Każdy rzekomy przestępca jest przestępcą.
- *Panie doktorze, cierpię na chroniczne niezdecydowanie, ale pewna tego nie jestem.*
- Co ma zrobić ateistka, poproszona o odmówienie modlitwy? Odmówić i nie odmówić, czy też nie odmówić i odmówić?
- Powoli zaczynamy się spieszyć.
- W kapitalizmie człowiek wykorzystuje człowieka. W komunizmie odwrotnie.

Cytaty klasyczne

- **Kamień.** Istota wszechmogąca może stworzyć kamień, którego nie może podnieść.
- **Teodycea.** Istnienie zła na świecie jest w zgodzie z miłosierdziem bożym.
- **Hempel.** Obserwowanie żółtych liści dostarcza konfirmacji, że wszystkie kruki są czarne.
- **Berry.** Najmniejsza liczba naturalna niedefiniowalna przez mniej niż 30 słów jest definiowalna przez mniej niż 30 słów.
- **Achilles.** Jeśli Żółw znajduje się w odległości np. 1m od Achillesa, to Achilles nigdy go nie dogoni.
- **Moment śmierci.** Jeśli żyjemy, to śmierci nie ma. Jeśli nie żyjemy, to nie ma życia. Moment śmierci nie może należeć ani do życia, ani do śmierci.

Cytaty klasyczne

- **Moore.** *Byłem wczoraj w kościele, ale w to nie wierzę.*
- **Quine.** *Jeśli to zdanie jest prawdziwe, to Pingwiny rządzą światem.*
- **Tezeusz.** Jeśli każdy element statku został co najmniej raz zastąpiony nowym, to czy mamy do czynienia wciąż z tym samym Statkiem?
- **Ograniczenia kontroli.** Nigdy nie możemy być pozbawieni kontroli, bowiem niepodleganie czyjejkolwiek kontroli oznacza samokontrolę.
- **Rzymskie.** Dla zachowania pokoju przygotowuj się do wojny.

Cytaty klasyczne

- **Nihilizm.** Jeśli prawda nie istnieje, to stwierdzenie *Prawda nie istnieje* jest prawdą.
- **Wszechmoc.** Co się stanie, gdy pocisk, który przebija wszystko trafi w tarczę, której nic nie może przebić?
- **Piosenka ontologiczna.** *To, co się dzieje, naprawdę nie istnieje, więc nie warto mieć niczego, tylko karmić zmysły.*
- **Niemożliwa odpowiedź.** Śpisz? *Tak.*
- **Stopnie nicości.** A im bardziej Puchatek zaglądał do środka, tym bardziej Prosiaczka tam nie było.
- **Sceptycyzm.** Nic nie jest poznawalne.
- **Solipsyzm.** Jestem solipsystą i dziwi mnie to, że inni nie są.

Koniec

W niniejszej i poprzedniej prezentacji staraliśmy się wprowadzić słuchaczy w problematykę KRP.

Były to przy tym proste rozważania semantyczne.

Wszystkie dalsze wykłady w semestrze letnim będą poświęcone różnym operacjom konsekwencji w KRP.