Metalogika

J.Pogonowski, J.Smigerska

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Uogólnione kwantyfikatory

Wprowadzenie

W niniejszej prezentacji wykorzystujemy:

- notatki z wykładów Jerzego Pogonowskiego dot. uogólnionych kwantyfikatorów prowadzonych w ubiegłym stuleciu
- wyjątki z rozprawy magisterskiej Joanny Smigerskiej *Kwantyfikatory uogólnione w językach naturalnych i formalnych* pisanej pod opieką Jerzego Pogonowskiego i obronionej w 1998 roku w Instytucie Językoznawstwa UAM.

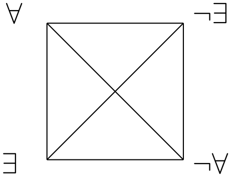
Historia naturalna kwantyfikatorów

Wśród logików, którzy muszą być wymienieni, gdy rozważamy uogólnione kwantyfikatory, są:

- Arystoteles
- Peirce
- Gottlob Frege
- Stanisław Leśniewski
- Andrzej Mostowski
- Roman Suszko
- Per Lindström
- Leon Henkin
- Współczesność: Richard Montague, Jon Barwise, Jerome H. Keisler, Johan van Benthem, Dag Westerståhl, i inni.

Tradycyjny kwadrat logiczny

Ten diagram (i zawarte w nim związki logiczne) znamy wszyscy:



W dalszym ciągu, będziemy mówić o występujących tu kwantyfikatorach jako o kwantyfikatorach z tradycyjnego kwadratu logicznego (TKL).

Figury i tryby sylogistyki klasycznej

Pamiętamy również figury sylogistyki Arystotelesa:

$$\frac{\begin{array}{c}Q_1 ZY\\ Q_2 XZ\end{array}}{Q_3 XY} \qquad \frac{\begin{array}{c}Q_1 YZ\\ Q_2 XZ\end{array}}{Q_3 XY} \qquad \frac{\begin{array}{c}Q_1 ZY\\ Q_2 ZX\end{array}}{Q_3 XY} \qquad \frac{\begin{array}{c}Q_1 YZ\\ Q_2 ZX\end{array}}{Q_3 XY}$$

Każdy z Q_i $(1 \leq i \leq 3)$ może być jednym z kwantyfikatorów z TKL. Możliwych trybów jest 256, trybów poprawnych (takich, w których wniosek wynika logicznie z przesłanek) jest 24. Jest też wiele sylogistyk niestandardowych (z dodatkowymi spójkami, negacją przynazwową, itd.)

Problem ogólny: jakie kwantyfikatory spełniają powyższe schematy?

Kwantyfikatory standardowe

Kwantyfikatory $\forall$ oraz $\exists$ pojawiają się w pracach Peirce'a oraz Fregego.

W wieku XIX mamy pierwsze algebraiczne interpretacje kwantyfikatorów. Dyskutuje się też możliwość „kwantyfikacji orzecznika".

Leśniewski stosuje kwantyfikację po zmiennych zdaniowych.

Tarski pokazuje, jak z pomocą kwantyfikatora ogólnego oraz negacji zdefiniować pozostałe stałe logiczne.

Suszko przypisuje kwantyfikatorom kategorie syntaktyczne (w sensie Ajdukiewicza).

Kwantyfikatory ilościowe Mostowskiego

Za pierwszą pracę dotyczącą kwantyfikatorów uogólnionych uważamy artykuł Andrzeja Mostowskiego z 1957 roku: On generalization of quantifiers *Fundamenta Mathematicae* **44**, 12–36.

Mostowski wprowadza kwantyfikatory ilościowe.

Kwantyfikator (lokalny) *na* M jest zbiorem podzbiorów M.
Kwantyfikator (globalny) jest funktorem $\boldsymbol{Q}$ przypisującym każdemu niepustemu zbiorowi M kwantyfikator $\boldsymbol{Q}_M$ na M.

Przykłady kwantyfikatorów Mostowskiego

Przykładami takich kwantyfikatorów są:

$$\forall_M = \{M\},$$

$$\exists_M = \{X \subseteq M : X \neq \emptyset\},$$

$$(\exists_{\geq n})_M = \{X \subseteq M : |X| \geq n\},$$

$$(\boldsymbol{Q}_\alpha)_M = \{X \subseteq M : |X| \geq \aleph_\alpha\},$$

$$(\boldsymbol{Q}_R)_M = \{X \subseteq M : |X| > |M - X|\}, \quad \text{(Kwantyfikator Reschera)},$$

$$(\boldsymbol{Q}_R)_M = \{X \subseteq M : |X| = |M|\}, \quad \text{(Kwantyfikator Changa)}.$$

Warunek Mostowskiego

Kwantyfikatory dotyczą tylko liczby elementów, a zatem nie powinny rozróżniać elementów w M:

ISOM — *Jeżeli f jest bijekcją z M do M', to* $X \in \boldsymbol{Q}_M \Leftrightarrow f[X] \in \boldsymbol{Q}_{M'}$.

Ten warunek przyjmowany jest we wszystkich późniejszych pracach dotyczących uogólnionych kwantyfikatorów.

Kwantyfikatory Lindströma

Pojęcie uogólnionego kwantyfikatora wprowadzone przez Mostowskiego nie obejmowało takich kwantyfikatorów jak np. binarny kwantyfikator **most** w zdaniach typu:

$$\textit{Most } \varphi \textit{ are } \psi$$

dający na każdym M binarną relację pomiędzy podzbiorami M:

$$\mathbf{most}_M = \{(X, Y) \in (\wp(M))^2 : |X \cap Y| > | X - Y |\}.$$

Lindström wprowadza zdefiniowane niżej pojęcie *kwantyfikatora uogólnionego* związanego z typem (tj. ciągiem $\langle k_1, \ldots , k_n \rangle$ liczb naturalnych; kwantyfikatory Mostowskiego posiadają typ $\langle 1 \rangle$, **most** typ $\langle 1, 1 \rangle$).

Kwantyfikatory Lindströma

(Lokalnym) *kwantyfikatorem uogólnionym na M typu* $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$ nazywamy dowolną n-arną relację pomiędzy podzbiorami $M^{k_1}, \ldots, M^{k_n}$.
(Globalnym) *kwantyfikatorem uogólnionym typu* $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$ jest funktor $\boldsymbol{Q}$, który każdemu zbiorowi M przyporządkowuje kwantyfikator lokalny $\boldsymbol{Q}_M$ typu $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$.

W większości przypadków będzie mowa o tzw. kwantyfikatorach uogólnionych monadycznych, czyli typu $\langle 1, 1, \ldots, 1 \rangle$. Można również mówić o monadycznych kwantyfikatorach *unarnych*, *binarnych*, itd., co oznacza, odpowiednio, kwantyfikatory uogólnione typu $\langle 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle$, itd.

Kwantyfikatory Lindströma

Lindström również zakłada *ISOM* w definicji kwantyfikatora uogólnionego:

ISOM *Jeżeli* f *jest bijekcją z* M *do* M', *to*
$(R_1, \ldots, R_n) \in \mathrm{Q}_M \Leftrightarrow (f[R_1], \ldots, f[R_n]) \in \boldsymbol{Q}_{M'}$.

Przykłady kwantyfikatorów Lindströma:

$$\mathbf{all}_M = \{(X, Y) \in (\wp(M))^2 : X \subseteq Y\},$$

$$\mathbf{some}_M = \{(X, Y) \in (\wp(M))^2 : X \cap Y \neq \emptyset\},$$

$$\mathbf{more}_M = \{(X, Y) \in (\wp(M))^2 : |X| > |Y|\},$$

$$\mathbf{I}_M = \{(X, Y) \in (\wp(M))^2 : |X| = |Y|\}, \quad \text{(Kwantyfikator Härtiga).}$$

Kwantyfikator Henkina

Pamiętamy, że przy tworzeniu prefiksowej postaci normalnej formuły języka rachunku predykatów wszystkie kwantyfikatory poprzedzają matrycę formuły. Przy skolemizacji takiej formuły eliminujemy kwantyfikatory egzystencjalne, wprowadzając nowe symbole funkcyjne (dla funkcji Skolema).

Symbol funkcyjny f wprowadzony przez eliminację kwantyfikatora $\exists$ z prefiksu kwantyfikatorowego $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$ ma tyle argumentów, ile kwantyfikatorów ogólnych poprzedza ów eliminowany kwantyfikator $\exists$ w prefiksie $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$.

Powstaje problem, czy ta procedura dobrze opisuje sytuacje, w których dokonujemy wyborów niezależnych.

Kwantyfikator Henkina

Henkin wprowadził uogólnienie tej procedury, dopuszczając prefiksy częściowo uporządkowane lub inaczej prefiksy rozgałęzione, za pomocą których można wyrazić zależności, których nie można przedstawić w sposób liniowy.

Kwantyfikator Henkina ma postać następującą:

$$\begin{array}{l} \forall x \text{——} \exists y \\ \forall u \text{——} \exists v \end{array} \!\!\!\!\!\!\!> \phi(x, y, u, v)$$

Częściowy porządek prefiksu ma oddawać sytuację, gdy dokonujemy wyborów niezależnych.

Kwantyfikator Henkina

Semantykę dla tego kwantyfikatora ustala się następująco:

Kwantyfikator Henkina to kwantyfikator typu $\langle 4 \rangle$ taki, że:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} \quad = \quad & \{R \subseteq M^4 : \textit{istnieją funkcje } f, g \textit{ na } M \textit{ takie,że} \\ & \textit{dla dowolnych } a, b \in M \;\; (a, f(a), b, f(b)) \in R\}. \end{aligned}$$

Język z kwantyfikatorem Henkina ma moc wyrażania istotnie większą niż język klasycznego rachunku predykatów. Można pokazać, że kwantyfikator Q_0 Mostowskiego ($Q_0 x\, \varphi(x)$ interpretujemy: istnieje nieskończenie wiele x takich, że $\varphi(x)$) jest definiowalny przez kwantyfikator Henkina.

Kwantyfikator Henkina

Hintikka podaje następujący przykład, pokazujący, że w językach etnicznych posługujemy się tego typu kwantyfikacją:

Some relative of each villager and some relative of each townsman hate each other.

Barwise wprowadza rozgałęzienia kwantyfikatorów uogólnionych oraz pokazuje, że dla odpowiednich $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2$ nawet najprostszy prefiks rozgałęziony:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{Q}_1 \\ \boldsymbol{Q}_2 \end{matrix} \Bigg>$$

(nieredukowalny do prefiksu liniowego) pojawia się w językach naturalnych.

Kwantyfikacja w językach etnicznych

Teza Richarda Montague:
Skwantyfikowane wyrażenia pojawiają się jako determinatory we frazach rzeczownikowych.
przekłada się na pewne ustalenia dotyczące semantyki.

$$S \Longrightarrow NP + VP \qquad NP \Longrightarrow Det + N$$

NP - *fraza rzeczownikowa* (Noun Phrase), VP - *fraza czasownikowa* (Verb Phrase), Det - *determinator* (Determiner).

W modelu $\boldsymbol{M} = (M, \|\ \|)$, gdzie M - uniwersum, $\|\ \|$ - funkcja denotacyjna, rzeczowniki (N) są interpretowane jako *podzbiory* M, frazy rzeczownikowe (NP) jako *zbiory podzbiorów* M, zaś determinatory (Det) jako *funkcje* działające z denotacji rzeczownika w denotacje frazy rzeczownikowej.

Kwantyfikacja w językach etnicznych

Jeśli zatem rzeczowniki denotują własności (podzbiory uniwersum), zaś frazy rzeczownikowe zbiory takich własności, to determinatory denotują sposób łączenia własności ze zbiorami własności. Przykłady:

$$||every||\,(A) = \{X \subseteq M : A \subseteq X\},$$

$$||most||\,(A) = \{X \subseteq M : |A \cap X| > |A - X|\},$$

$$||no||\,(A) = \{X \subseteq M : |A \cap X| = \emptyset\}.$$

Kwantyfikatory na uniwersum M są *relacjami* pomiędzy podzbiorami M. Każdej n-argumentowej funkcji $\boldsymbol{D}$, z $(\wp(M))^n$ do $\wp(\wp(M))$, przyporządkujemy $(n+1)$-argumentowy kwantyfikator $\boldsymbol{Q}_M$ na M:

$$\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow B \in \boldsymbol{D}(A_1 \ldots A_n).$$

Determinatory sa wtedy interpretowane jako monadyczne kwantyfikatory na danym uniwersum.

Kwantyfikacja w językach etnicznych

Kwantyfikator Q nazywamy (prostym) *kwantyfikatorem języka naturalnego*, jeżeli jest on denotowany przez pewien (prosty) determinator języka naturalnego.

Westerståhl proponuje następujący postulat:

Proste determinatory są stałymi: każdy denotuje określony kwantyfikator.

Nie wszystkie binarne kwantyfikatory wydają się być kwantyfikatorami języka naturalnego. Powstaje pytanie, które z nich takimi są oraz jakie ograniczenia należy nałożyć na kwantyfikatory, aby stały się interpretacjami determinatorów.

Kwantyfikacja w językach etnicznych

Podstawowym takim warunkiem jest *zachowawczość* (ang. conservativity):

CONSERV Dla wszystkich M oraz wszystkich $A, B \subseteq M$,
$\boldsymbol{Q}_M AB \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_M A\ A \cap B$.

CONSERV wzmacnia rolę pierwszego argumentu $\boldsymbol{Q}$: tylko ta część B, która jest wspólna z A, jest istotna dla stwierdzenia czy zachodzi relacja $\boldsymbol{Q}_M$.

Warunek zachowawczości nawiązuje do tradycyjnego rozumienia kwantyfikacji (podmiotu).

Kwantyfikacja w językach etnicznych

Binarną wersję *CONSERV* można łatwo rozszerzyć do $(n+1)$-argumentowych kwantyfikatorów:

CONSERV *Dla każdego* M *oraz wszystkich* $A_1, \ldots, A_n, B \subseteq M$,
$\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap B$.

Łatwo sprawdzić, że trójargumentowe kwantyfikatory **more...than**, **fewer...than**, **as many...as** są zachowawcze, w przeciwieństwie do binarnego **more**.

Interpretacje semantyczne niektórych prostych determinatorów:

$$\mathbf{all}_M AB \Leftrightarrow \mathbf{every}_M AB \Leftrightarrow \mathbf{each}_M AB \Leftrightarrow A \subseteq B,$$

$$\mathbf{some}_M AB \Leftrightarrow \mathbf{a}_M AB \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset,$$

$$\mathbf{no}_M AB \Leftrightarrow \mathbf{zero}_M AB \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset,$$

$$\mathbf{most}_M AB \Leftrightarrow |A \cap B| > |A - B|,$$

$$\mathbf{both}_M AB \Leftrightarrow \mathbf{all}_M AB \ \& \ |A| = 2,$$

$$\mathbf{neither}_M AB \Leftrightarrow \mathbf{no}_M AB \ \& \ |A| = 2,$$

$$\mathbf{two}_M AB \Leftrightarrow |A \cap B| \geq 2,$$

$$\mathbf{more...than}_M A_1 A_2 B \Leftrightarrow |A_1 \cap B| > |A_2 \cap B|,$$

$$\mathbf{fewer...than}_M A_1 A_2 B \Leftrightarrow |A_1 \cap B| < |A_2 \cap B|,$$

$$\mathbf{as\ many...as}_M A_1 A_2 B \Leftrightarrow |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B|.$$

Kwantyfikacja w językach etnicznych

Niektóre dalsze determinatory:

- zależne od kontekstu (*many, few, a large number of, unexpectedly few, unusualy many,...,*)
- rodzajnik określony, zaimki dzierżawcze, zaimki wskazujące
- liczbowe (*one, two, exactly five, infinitely many, at most finitely many, around ten, every third, approximately ten,...*)
- porównawcze (*more...than, exactly as many...as, ..., fewer of male than female,...*)
- wyjątku (*all but five, all but at most three, all but finitely many,...*)

$\textbf{all but five}_M AB \Leftrightarrow |A - B| = 5$
$\textbf{all but at most three}_M AB \Leftrightarrow |A - B| \leq 3$

Kwantyfikacja w językach etnicznych

Interpretację kwantyfikatorów zanegowanych można przedstawić następująco:

$$\textbf{not } \boldsymbol{Q}_M AB \Leftrightarrow \neg \boldsymbol{Q}_M AB,$$

not nie może jednak stać przed każdym determinatorem (np. *not some, not most, not at most five* są źle sformułowane). Jednak nawet jeżeli np. *not most* nie jest determinatorem, zanegowany kwantyfikator **most** można wyrazić innym kwantyfikatorem:

$$\begin{aligned} \neg\textbf{most}_M & \Leftrightarrow |A \cap B| \leq |A - B| \\ & \Leftrightarrow |A \cap B| \leq \frac{1}{2}|A| (\text{na zbiorach skończonych}) \\ & \Leftrightarrow \textbf{not more than half (of the)}_M AB. \end{aligned}$$

Kwantyfikacja w językach etnicznych

Dowolne dwa kwantyfikatory języka naturalnego mogą być połączone za pomocą *and* lub *or*. Klasa binarnych kwantyfikatorów języka naturalnego jest zamknięta ze względu na koniunkcję i alternatywę.

Istnieją dwie różne interpretacje kwantyfikatorów postaci $\boldsymbol{Q}_M A$ *and*/*or* B:

$$
\begin{aligned}
Q^1_M A_1 \textit{ and } A_2 B &\Leftrightarrow Q_M A_1 \cap A_2 B,\\
Q^2_M A_1 \textit{ and } A_2 B &\Leftrightarrow Q_M A_1 B \ \& \ Q_M A_2 B,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^1_M A_1 \textit{ or } A_2 B &\Leftrightarrow Q_M A_1 \cup A_2 B,\\
Q^2_M A_1 \textit{ or } A_2 B &\Leftrightarrow Q_M A_1 B \ \vee \ Q_M A_2 B.
\end{aligned}
$$

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Naturalnym sposobem badania klasy kwantyfikatorów języka naturalnego jest obserwowanie efektu jaki wywołuje nałożenie na klasę wszystkich kwantyfikatorów lingwistycznie umotywowanych ograniczeń, takich jak np. *CONSERV*.

Z tymi ograniczeniami związane są *semantyczne uniwersalia*, tzn. ogólne stwierdzenia o semantycznej interpretacji kwantyfikatorów, prawdziwe we wszystkich językach naturalnych.

Westerståhl proponuje następujące założenie:

- **(U1)** Kwantyfikatory języków etnicznych są monadyczne lub są redukowalne do kwantyfikatorów monadycznych.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Przypomnijmy, że zachowawczość to własność przypisująca pierwszemu argumentowi rolę uprzywilejowaną:

CONSERV *Dla każdego* M *oraz wszystkich* $A_1, \ldots, A_n, B \subseteq M$,
$\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap B$

CONSERV pozwala na ograniczenie denotacji frazy czasownikowej do denotacji rzeczownika.

Extension (rozszerzenie) to własność określająca niezależność od uniwersum:

EXT *Jeżeli* $A_1, \ldots, A_n, B \subseteq M \subseteq M'$,
to $\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_{M'} A_1 \ldots A_n B$.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Połączenie *CONSERV* i *EXT* daje następujący warunek:

UNIV $\quad \mathbf{Q}_M A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \mathbf{Q}_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} A_1 \ldots A_n (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap B.$

Niezależność kwantyfikatora od cech indywidualnych obiektów wyraża:

QUANT $\quad$ *Dla wszystkich* M *i* M', *wszystkich bijekcji* $f : M \to M'$ *oraz wszystkich* $A_1, \ldots, A_n, B \subseteq M$,
$\mathbf{Q}_M A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \mathbf{Q}_{M'} f[A_1] \ldots f[A_n] f[B]$

Ten ostatni warunek to inne sformułowanie warunku ISOM rozważanego już przez Mostowskiego.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

CONSERV, *EXT* oraz $QUANT$ traktuje się jako **semantyczne uniwersalia**:

- **(U2)** Kwantyfikatory języków etnicznych spełniają CONSERV.
- **(U3)** Kwantyfikatory języków etnicznych spełniają EXT.
- **(U4)** Kwantyfikatory języków etnicznych spełniają QUANT.

(U1)–(U4) to pewne założenia teorii kwantyfikatorów języków etnicznych.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Kwantyfikator n-argumentowy ($n \geq 1$) nazywamy *logicznym* jeżeli spełnia *CONSERV*, *EXT*, *QUANT*.

Dla kwantyfikatorów binarnych bycie kwantyfikatorem logicznym oznacza zależność kwantyfikatora jedynie od liczb: $|A - B|$ oraz $|A \cap B|$.

Twierdzenie.
Binarny kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ jest *logiczny* wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich M, M' oraz wszystkich $A, B \subseteq M$ i $A', B' \subseteq M'$:
$|A - B| = |A' - B'|$ oraz $|A \cap B| = |A' \cap B'|$ implikuje
$\boldsymbol{Q}_M AB \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_{M'} A'B'$.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Dowód.

$\Rightarrow$

Załóżmy, że $\boldsymbol{Q}$ jest logiczny (spełnia *CONSERV*, *EXT*, *QUANT*) oraz niech $|A - B| = |A' - B'|$ i $|A \cap B| = |A' \cap B'|$. Wtedy na mocy *QUANT* $\boldsymbol{Q}_A AA \cap B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_{A'} A'A' \cap B'$, i na mocy *UNIV* $\boldsymbol{Q}_M AB \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_{M'} A'B'$.

$\Leftarrow$

Jeżeli prawa strona równoważności zachodzi, to *QUANT* jest spełnione natychmiastowo.
Weźmy M oraz $A, B \subseteq M$ oraz niech $M' = A' = A$.
Wtedy $\boldsymbol{Q}_M AB \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_A AA \cap B$ zatem *UNIV* jest spełnione.

Oznacza to, że binarne relacje pomiędzy *zbiorami* mogą być zastąpione binarnymi relacjami pomiędzy *liczbami kardynalnymi*, co będzie wykorzystane przy drzewach numerycznych.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Klasa kwantyfikatorów logicznych jest zamknięta ze względu na operacje boolowskie:

Jeżeli $\boldsymbol{Q}_1$ i $\boldsymbol{Q}_2$ spełniają *CONSERV* oraz *EXT* (*QUANT*), to $\boldsymbol{Q}_1 \wedge \boldsymbol{Q}_2$, $\boldsymbol{Q}_1 \vee \boldsymbol{Q}_2, \neg\boldsymbol{Q}_1$ również posiadają te własności.

Dla binarnego kwantyfikatora $\boldsymbol{Q}$ możliwe są dwie $(n+1)$-argumentowe koniunkcje wewnętrzne:

$$\boldsymbol{Q}_M^{\wedge 1} A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_M A_1 \cap \ldots \cap A_n B,$$

$$\boldsymbol{Q}_M^{\wedge 2} A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_M A_1 B \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \boldsymbol{Q}_M A_n B.$$

Podobnie definiuje się alternatywy wewnętrzne $\boldsymbol{Q}^{\vee 1}$ oraz $\boldsymbol{Q}^{\vee 2}$.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Jeżeli $\boldsymbol{Q}$ jest $(n+1)$-argumentowym kwantyfikatorem, to jego *wewnętrzną negacją* jest kwantyfikator $\boldsymbol{Q}\neg$, taki, że:
$(\mathbf{Q}\neg)_M A_1 \ldots A_n B \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n M - B$.

Kwantyfikatorem *dualnym* $\breve{\boldsymbol{Q}}$ do $\boldsymbol{Q}$ jest kwantyfikator $\neg(\boldsymbol{Q}\neg)[= (\neg\boldsymbol{Q})\neg.]$
Negacje zewnętrzna oraz wewnętrzna korespondują odpowiednio z negacją zdania oraz negacją frazy orzecznikowej.

Klasa kwantyfikatorów logicznych jest zamknięta ze względu na wewnętrzną koniunkcję i alternatywę (obu rodzajów) oraz wewnętrzną negację i operację tworzenia kwantyfikatorów dualnych.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Westerståhl twierdzi, że klasa binarnych kwantyfikatorów języków etnicznych jest zamknięta ze względu na zewnętrzną koniunkcję i alternatywę oraz proponuje następujące uniwersale:

- **(U5)** Jeżeli Q_1 oraz Q_2 są binarnymi kwantyfikatorami języków etnicznych, to $Q_1 \wedge Q_2$ oraz $Q_1 \vee Q_2$ są również takimi kwantyfikatorami.

W przypadku negacji analogiczne stwierdzenie nie jest oczywiste. W poniższej tabeli podane są przykłady determinatorów języka angielskiego, dla których można znaleźć negacje jak i determinatory dualne. Znak „ - ” oznacza, iż trudno znaleźć negację bądź determinator dualny do danego. Można oczywiście przedstawić te kwantyfikatory za pomocą odpowiedniej formuły, jednak nadal pozostaje kwestia znalezienia *determinatora* denotującego dany kwantyfikator.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Q	$\neg Q$	$Q\neg$	$\breve{Q}$
some	*no*	*not every*	*every*
every	*not every*	*no*	*some*
no	*some*	*every*	*not every*
most	*at most half*	*less than half*	*at least half*
many	*few*	-	*all but a few*
infinitely many	*at most finitely many*	-	*all but finitely many*
(at least) n	*less than n*	-	*all but less than n*
at most n	*more than n*	*all but at most n*	-
(exactly) n	*not exactly n*	*all but n*	-
more...than	*at most as many...as*	-	-
fewer...than	*at least as many...as*	-	-

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

n-argumentowy kwantyfikator jest *trywialny na M*, jeżeli $\boldsymbol{Q}_M$ jest pustą lub pełną n-argumentową relacją na $P(M)$.

NONTRIV $\boldsymbol{Q}$ *jest nietrywialny na pewnych uniwersach.*

- **(U6)** Proste kwantyfikatory języków etnicznych spełniają NONTRIV.

Kwantyfikatory, które naruszają *NONTRIV* nie są interesujące: zdanie rozpoczynające się od determinatora denotującego taki kwantyfikator (spełniający *EXT*) jest albo prawdziwe we wszystkich modelach albo we wszystkich modelach fałszywe. Kwantyfikatorem trywialnym jest np. *mniej niż zero*.

Klasa kwantyfikatorów nietrywialnych nie jest zamknięta ze względu na operacje boolowskie.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Wzmocnioną wersją *NONTRIV* jest *activity*:

ACT $\qquad$ ***Q*** *jest nietrywialny na każdym universum.*

Wiele kwantyfikatorów języka naturalnego spełnia *ACT*, chociaż nawet pośród prostych kwantyfikatorów istnieją wyjątki, np.: **both, two, three**, itp. (Jeżeli w M jest mniej niż cztery elementy, to $\mathbf{four}_M AB$ jest zawsze fałszywe).

J. van Benthem podaje jeszcze mocniejszą wersję *ACT* dla binarnych kwantyfikatorów, *variety*, zaś Westerståhl uogólnia ją do $(n+1)$-argumentowych kwantyfikatorów:

VAR $\qquad$ *Dla każdego* M *oraz wszystkich* $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$, *takich, że* $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$, *istnieją* B_1, B_2, *takie, że* $\boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B_1$ *oraz* $\neg \boldsymbol{Q}_M A_1 \ldots A_n B_2$.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Zachodzą następujące implikacje:

$$VAR \Longrightarrow ACT \Longrightarrow NONTRIV,$$

jednak odwrotne implikacje nie są prawdziwe.

(Przykładem kwantyfikatora, który spełnia ACT zaś narusza VAR jest $\boldsymbol{Q}_M AB \Leftrightarrow |A| = 1$).

Westerståhl twierdzi jednak, że wśród kwantyfikatorów języka naturalnego, te kwantyfikatory, które spełniają ACT spełniają również VAR.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

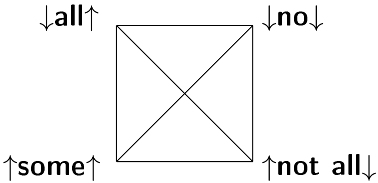
Binarny kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ jest

$$
\begin{aligned}
&MON\!\uparrow, \text{ gdy zachodzi } \boldsymbol{Q}_M AB \ \wedge \ B \subseteq B' \Rightarrow \boldsymbol{Q}_M AB',\\
&MON\!\downarrow, \text{ gdy zachodzi } \boldsymbol{Q}_M AB \ \wedge \ B' \subseteq B \Rightarrow \boldsymbol{Q}_M AB',\\
&\uparrow\!MON, \text{ gdy zachodzi } \boldsymbol{Q}_M AB \ \wedge \ A \subseteq A' \Rightarrow \boldsymbol{Q}_M A'B,\\
&\downarrow\!MON, \text{ gdy zachodzi } \boldsymbol{Q}_M AB \ \wedge \ A' \subseteq A \Rightarrow \boldsymbol{Q}_M A'B.
\end{aligned}
$$

Kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ jest *monotoniczny prawostronnie* (*RIGHT MON*), gdy jest $MON\!\uparrow$ lub $MON\!\downarrow$, zaś *monotoniczny lewostronnie* (*LEFT MON*), gdy jest $\uparrow\!MON$ lub $\downarrow\!MON$.
$\boldsymbol{Q}$ jest $\downarrow\!MON\!\downarrow$, gdy jest $\downarrow\!MON$ i $MON\!\downarrow$ jednocześnie. Analogicznie dla $\uparrow\!MON\!\uparrow$, $\downarrow\!MON\!\uparrow$, $\uparrow\!MON\!\downarrow$.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Cztery typy *podwójnej monotoniczności* są zawarte w kwadracie logicznym:



Inne przykłady podwójnie monotonicznych kwantyfikatorów: ↑*MON*↑: **at least n, infinitely many**, ↓*MON*↓: **at most n, at most finitely many**. Kwantyfikatory **most, the, John's** są *MON*↑, ale nie są *LEFT MON*, zaś kwantyfikatory **exactly n, all but n, between five and ten** nie są ani *LEFT MON* ani *RIGHT MON*.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Różne rodzaje monotoniczności są silnymi własnościami kwantyfikatorów. Związane są też z rozważanym w tradycyjnej sylogistyce *rozłożeniem terminów*.

- (1) Zewnętrzna negacja odwraca kierunki *RIGHT* jak i *LEFT MON*.
- (2) Wewnętrzna negacja odwraca kierunek *RIGHT MON* jednak zachowuje *LEFT MON*.
- (3) Operacja tworzenia kwantyfikatora dualnego zachowuje kierunek *RIGHT MON* jednak odwraca kierunek *LEFT MON*.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Twierdzenie.
Przy spełnionych *CONSERV* oraz *VAR*, jedynymi podwójnie monotonicznymi kwantyfikatorami są dokładnie te z kwadratu logicznego.

Dowód

Załóżmy, że $\boldsymbol{Q}$ jest $\downarrow MON\downarrow$. Udowodnimy, że $\boldsymbol{Q}$ musi być **no**. Weźmy uniwersum M oraz $A, B \subseteq M$.
(i) Załóżmy, że $A \cap B = \emptyset$. Weźmy niepusty $A', A \subseteq A'$. Na mocy *VAR* istnieje takie $C \subseteq M$, takie, że $\boldsymbol{Q}_M A'C$. Jako, że $\boldsymbol{Q}$ jest $\downarrow MON$, otrzymujemy $\boldsymbol{Q}_M AC$, na mocy $MON\downarrow$ zaś $\boldsymbol{Q}_M A\emptyset$. Założyliśmy, że $A \cap B = \emptyset$, zatem $\boldsymbol{Q}_M AA \cap B$, z tego zaś na mocy *CONSERV* otrzymujemy $\boldsymbol{Q}_M AB$.
(ii) Załóżmy, że zachodzi relacja $\boldsymbol{Q}_M AB$. Na mocy $\downarrow MON\downarrow$ otrzymujemy $\boldsymbol{Q}_M A \cap BA \cap B$, z czego $(MON\downarrow)$ mamy $\boldsymbol{Q}_M A \cap BA \cap B \cap C$ dla dowolnego $C \subseteq M$, na mocy *CONSERV* otrzymujemy $\boldsymbol{Q}_M A \cap BC$, zatem (VAR) $A \cap B = \emptyset$.

W pozostałych trzech przypadkach dowód przebiega podobnie.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Binarny kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ jest:
(i) *ciągły prawostronnie* (*RIGHT CONT*), gdy $\boldsymbol{Q}_M AB$ oraz $\boldsymbol{Q}_M AB''$ oraz $B \subseteq B' \subseteq B''$ implikuje $\boldsymbol{Q}_M AB'$,
(i) *ciągły lewostronnie* (*LEFT CONT*), gdy $\boldsymbol{Q}_M AB$ oraz $\boldsymbol{Q}_M A''B$ oraz $A \subseteq A' \subseteq A''$ implikuje $\boldsymbol{Q}_M A'B$.
Kwantyfikator nazywamy *STRONG RIGHT (LEFT) CONT* jeżeli zarazem on, jak i jego negacja są *RIGHT (LEFT) CONT*.

Zależność pomiędzy monotonicznością i ciągłością wyraża następująca implikacja:

$$\begin{gathered} \mathit{RIGHT\ (LEFT)\ MON} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathit{STRONG\ RIGHT\ (LEFT)\ CONT} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathit{RIGHT\ (LEFT)\ CONT} \end{gathered}$$

Odwrotna implikacja nie jest prawdziwa: np. **exactly n** jest *RIGHT* oraz *LEFT CONT*, jednak nie jest *STRONG RIGHT (LEFT) CONT*.

Własności uogólnionych kwantyfikatorów

Barwise i Cooper proponują następujące uniwersale:

- **(U7)** Binarne kwantyfikatory języka naturalnego są RIGHT CONT.

Należy zauważyć, że kwantyfikator, który jest *RIGHT CONT*, jest koniunkcją dwóch kwantyfikatorów, z których jeden jest *MON*↑ zaś drugi *MON*↓, np. **exactly n** jest koniunkcją **at least n** oraz **at most n**. Jako, że *CONSERV* przypisuje pierwszemu argumentowi rolę uprzywilejowaną, lewostronne wersje *MON* czy też *CONT* są silniejsze niż ich prawostronne odpowiedniki.

Kwantyfikatory jako relacje

Jeżeli żadne inne założenia nie będą podane, zakłada się dalej, że wszystkie rozważane kwantyfikatory są logiczne (czyli spełniają *CONSERV*, *EXT*, oraz *QUANT*) oraz spełniają *NONTRIV*.

Dla kwantyfikatorów w językach etnicznych wydaje się uzasadnione przyjęcie następującego założenia:

FIN *Jedynie skończone uniwersa brane są pod uwagę.*

Z drugiej strony, determinatory takie, jak *infinitely many, all but finitely many* wymagają użycia modeli nieskończonych.

WŁASNOŚĆ *Kwantyfikator **Q** jest:*	**DEFINICJA** *gdy:*	**PRZYKŁADY**
SYMETRYCZNY	$QAB \Rightarrow QBA$	some, no, at least n at most n, exactly n, between n and m
ANTYSYMETRYCZNY	$QAB \wedge QBA \Rightarrow A = B$	all
ASYMETRYCZNY	$QAB \Rightarrow \neg QBA$	-
ZWROTNY	QAA	all, at least five all but finitely many
QUASI-ZWROTNY	$QAB \Rightarrow QAA$	some, most at least n
SŁABO ZWROTNY	$QAB \Rightarrow QBB$	some, most at least n
QUASI-UNIWERSALNY	$QAA \Rightarrow QAB$	no, not all, all but n
PRZECIWZWROTNY	$\neg QAA$	not all, all but n
LINIOWY	$QAB \vee QBA \vee A = B$	not all
PRZECHODNI	$QAB \wedge QBC \Rightarrow QAC$	all, all but finitely many
KOŁOWY	$QAB \wedge QBC \Rightarrow QCA$	-
EUKLIDESOWY	$QAB \wedge QAC \Rightarrow QBC$	-
ANTYEUKLIDESOWY	$QAB \wedge QCB \Rightarrow QAC$	-

Kwantyfikatory jako relacje

Dowodzi się, że nie ma kwantyfikatorów:

- asymetrycznych,
- euklidesowych
- kołowych.

Twierdzenia te wyjaśniają „semantyczne luki” w językach naturalnych („-” w powyższej tabelce).

Żaden kwantyfikator nie jest jednocześnie:

- (1) symetryczny i przechodni,
- (2) symetryczny i antyeuklidesowy,
- (3) symetryczny i zwrotny,
- (4) quasi-uniwersalny i zwrotny.

Kwantyfikatory jako relacje

Jedynym zwrotnym i antysymetrycznym kwantyfikatorem jest **all**.

- (1) Jeżeli $\boldsymbol{Q}$ jest zwrotny i przechodni, to $\boldsymbol{Q}$ jest $\downarrow MON\uparrow$.
- (2) Jeżeli $\boldsymbol{Q}$ jest symetryczny, to
  - (a) $\boldsymbol{Q}$ jest quasi-zwrotny wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{Q}$ jest $MON\uparrow$,
  - (b) $\boldsymbol{Q}$ jest quasi-uniwersalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{Q}$ jest $MON\downarrow$.

Przy założeniu FIN oraz ACT, jedynym zwrotnym i przechodnim kwantyfikatorem jest **all**.

Kwantyfikatory jako relacje

Kwantyfikatory z kwadratu logicznego posiadają następujące własności (modulo *VAR*):

all	:	zwrotny, przechodni,
some	:	symetryczny, quasi-zwrotny,
not all	:	przeciwzwrotny, liniowy,
no	:	symetryczny, quasi-uniwersalny.

Reprezentacja numeryczna

Każdy binarny kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$, który spełnia *CONSERV*, *EXT*, *QUANT*, może być identyfikowany z binarną relacją pomiędzy liczbami kardynalnymi. Relacja ta jest definiowana następująco:

$$\boldsymbol{q}xy \quad \Leftrightarrow \quad \text{dla pewnych } A, B, \text{ takich, że } |A - B| = x \text{ i } |A \cap B| = y, \text{ zachodzi relacja } \boldsymbol{Q}AB.$$

Z drugiej strony, mając daną dowolną binarną relację $\boldsymbol{q}$ pomiędzy liczbami kardynalnymi, można otrzymać odpowiadający jej logiczny (czyli spełnaiający *CONSERV*, *EXT* i *QUANT*) kwantyfikator $\boldsymbol{Q}$ na mocy:

$$\boldsymbol{Q}AB \Leftrightarrow \boldsymbol{q}|A - B||A \cap B|.$$

Używanie w dalszej części tego samego symbolu dla kwantyfikatora oraz relacji między liczbami nie powinno prowadzić do nieporozumień.

Reprezentacja numeryczna

Oto kilka *numerycznych* wersji podanych wcześniej kwantyfikatorów:

all $xy \Leftrightarrow x = 0$,
no $xy \Leftrightarrow y = 0$,
some $xy \Leftrightarrow y \neq 0$,
infinitely many $xy \Leftrightarrow y$ jest nieskończona
both $xy \Leftrightarrow x = 0 \;\&\; y = 2$.

Traktowanie kwantyfikatorów z perspektywy relacji pomiędzy liczbami kardynalnymi odpowiednich podzbiorów uniwersum staje się bardziej atrakcyjne, gdy założymy *FIN*. Kwantyfikatory stają się wtedy podzbiorami N^2. N^2 może być reprezentowane przez *drzewko numeryczne*, w którym każdy punkt (x, y) posiada dwa następniki $(x+1, y), (x, y+1)$, które to punkty są z kolei poprzednikami punktu $(x+1, y+1)$.

Reprezentacja numeryczna

wiersz $x = |A - B|$ $\quad$ (0,0)

(1,0) $\quad$ (0,1) $\quad$ kolumna $y = |A \cap B|$

(2,0) $\quad$ (1,1) $\quad$ (0,2)

(3,0) $\quad$ (2,1) $\quad$ (1,2) $\quad$ (0,3)

(4,0) $\quad$ (3,1) $\quad$ (2,2) $\quad$ (1,3) $\quad$ (0,4) $\quad$ $x + y = |A|$

Przekątna (diagonalna) w takim drzewie numerycznym to ciąg tych par (x, y) dla których $x + y = |A|$.

```
        +
      −   +
    −   −   +
  −   −   −   +
−   −   −   −   +
```

all

```
        −
      −   +
    −   +   −
  −   +   −   −
−   +   −   −   −
```

exactly one

```
        −
      −   +
    −   −   +
  −   −   +   +
−   −   −   +   +
```

most

```
        −
      −   −
    −   −   +
  −   −   +   +
−   −   +   +   +
```

at least two

```
        +
      −   +
    −   +   +
  −   −   +   +
−   −   +   +   +
```

half or more

```
        +
      −   +
    +   −   +
  −   +   −   +
+   −   +   −   +
```

all but an even number

Reprezentacja numeryczna

Dzięki tej technice, można podać jakie warunki muszą spełniać graficzne reprezentacje kwantyfikatorów, aby kwantyfikatory te posiadały określone własności:

$NONTRIV$ $\Leftrightarrow$ w drzewku pojawia się przynajmniej jeden $+$ oraz przynajmniej jeden $-$,

ACT $\Leftrightarrow$ w górnym trójkącie (0,0), (1,0), (0,1) pojawia się przynajmniej jeden $+$ oraz przynajmniej jeden $-$,

VAR $\Leftrightarrow$ na każdej diagonalnej (za wyjątkiem (0,0)) pojawia się przynajmniej jeden $+$ i przynajmniej jeden $-$.

Powyższe warunki obrazują fakt, że VAR jest silniejszym założeniem niż ACT.

Reprezentacja numeryczna

Podobne warunki można określić dla monotoniczności:

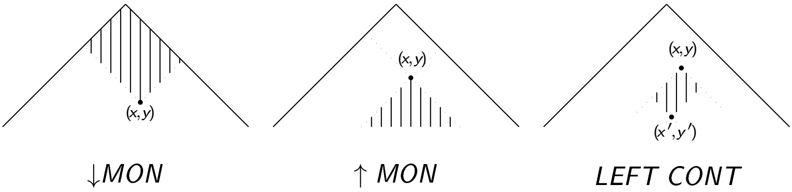
$MON\!\uparrow$ $\Leftrightarrow$ jeżeli jakiś punkt należy do $\boldsymbol{Q}$, to wszystkie punkty na tej samej diagonalnej na prawo od danego punktu również należą do $\boldsymbol{Q}$ (każdy $+$ wypełnia swoją diagonalną plusami w prawą stronę),

$MON\!\downarrow$ $\Leftrightarrow$ analogicznie do $MON\!\uparrow$, tylko w lewą stronę,

RIGHT CONT pomiędzy dowolnymi dwoma $+$ na danej diagonalnej pojawiają się tylko plusy.

Reprezentacja numeryczna

Reguły dla lewostronnej wersji monotoniczności i ciągłości najlepiej zobrazują wykresy:



Wykresy te mówią, że jeżeli punkt (x, y) należy do kwantyfikatora $\boldsymbol{Q}$, to należą do niego wszystkie punkty z zakreskowanego obszaru.

Reprezentacja numeryczna

Twierdzenie. (*VAR*)
Kwantyfikatorami lewostronnie monotonicznymi są dokładnie te z kwadratu logicznego.

Dowód. Wszystkie kwantyfikatory z kwadratu logicznego są niewątpliwie *LEFT MON*. Rozważmy więc w drzewku numerycznym dowolny kwantyfikator, który jest lewostronnie monotoniczny. Istnieją tylko cztery możliwe górne trójkąty (na mocy *VAR* druga diagonalna musi mieć postać $+-$ lub $-+$). Każdy z tych czterech trójkątów generuje jeden kwantyfikator w drzewie (na mocy wcześniejszych obserwacji typów monotoniczności). Fakt ten zaś implikuje możliwość pojawienia się $+$ wyłącznie na lewej krawędzi drzewka (w przeciwnym przypadku postawiony już $-$ musiałby być $+$). Plusy muszą się zaś pojawić na lewej krawędzi, bo w przeciwnym razie naruszałyby *VAR*. Rozważanym kwantyfikatorem jest zatem kwantyfikator **no**. Podobnie dla reszty TKL.

Reprezentacja numeryczna

Jedną z podstawowych intuicji dotyczących stałych logicznych jest idea, że w semantycznym zachowaniu się kwantyfikatorów powinna istnieć pewna „gładkość".
Intuicje te w części oddaje *RIGHT CONT*:

$$\text{jeżeli } \boldsymbol{Q}_M AB, \ \boldsymbol{Q}_M AB'' \text{ oraz } B \subseteq B' \subseteq B'', \text{ to } \boldsymbol{Q}_M AB'$$

Wydaje się uzasadnione wymaganie ciągłości przy niezachodzeniu relacji:

$$\text{jeżeli } \neg\boldsymbol{Q}_M AB, \ \neg\boldsymbol{Q}_M AB'' \text{ oraz } B \subseteq B' \subseteq B'', \text{ to } \neg\boldsymbol{Q}_M AB'$$

Połączenie tych dwóch reguł wymusza *RIGHT MON* na każdej diagonalnej drzewka numerycznego. Ich koniunkcja będzie od tej pory oznaczana jako *CONT*.

Reprezentacja numeryczna

Kolejnym postulatem jest wymaganie gładkiego przejścia pomiędzy sąsiednimi diagonalnymi. Jeżeli zachodzi relacja $\boldsymbol{Q}AB$, to po dodaniu nowego elementu do A przynajmniej jedna z dwóch opcji (zwiększenie $|A - B|$ lub zwiększenie $|A \cap B|$) musi wywoływać zachodzenie $\boldsymbol{Q}$; podobnie przy falsyfikacji $\boldsymbol{Q}$. W terminach drzewka numerycznego warunek ten ma postać:

$$\text{jeżeli } (x, y) \in \boldsymbol{Q}, \text{ to } (x+1, y) \in \boldsymbol{Q} \text{ lub } (x, y+1) \in \boldsymbol{Q},$$

$$\text{jeżeli } (x, y) \in \boldsymbol{Q}, \text{ to } (x+1, y) \in \boldsymbol{Q} \text{ lub } (x, y+1) \in \boldsymbol{Q}.$$

Postulat ten będzie oznaczany *PLUS*.

CONT i PLUS wyrażają mocną formę ciągłości we trzech głównych kierunkach w drzewku numerycznym: $\nearrow$, $\longleftrightarrow$, $\nwarrow$.

Reprezentacja numeryczna

Kolejnym warunkiem na to, że stałe logiczne nie rozróżniają liczb kardynalnych jest postulat, że kwantyfikatory powinny być *jednolite*. Żadna para (x, y) nie powinna być wyróżniona: każde przejście w dół drzewka powinno odbywać się w ten sam sposób. Przejście o jeden krok w dół może być postrzegane jako pewien eksperyment na testowanie zachowania się kwantyfikatora. Zaczynając od dowolnej pary (x, y) (przy $\boldsymbol{Q}$ spełnionym bądź nie), notujemy wartości prawdziwościowe dla $(x + 1, y)$ oraz dla $(x, y + 1)$. Istnieje osiem różnych schematów wartości prawdziwościowych takiej próby (z których *PLUS* wyklucza wyniki $\overset{+}{-\ -}\ \overset{-}{+\ +}$).

Warunek *jednolitości* (*uniformity*) ma postać:

UNIF Znak dowolnego punktu w drzewku determinuje znaki swoich następników

Reprezentacja numeryczna

Warunek UNIF mówi o tym, że wyniki eksperymentu są jednolite, zawsze takie same – nie zależą od liczby elementów w odpowiednich zbiorach. Nie jest istotne, gdzie przeprowadzimy test: kwantyfikator będzie zachowywał się jednolicie.

Twierdzenie. (*FIN*)
Jedynymi kwantyfikatorami spełniającymi *CONSERV*, *EXT*, *QUANT*, jak i *CONT*, *PLUS*, *UNIF* są kwantyfikatory z kwadratu logicznego.

Reprezentacja numeryczna

Dowód. Wszystkie te kwantyfikatory spełniają wymienione własności. Rozważmy drzewko numeryczne. Które z rozkładów $+/-$ są dozwolone przez wymienione warunki? Na wierzchołku może pojawić sie zarówno $+$ jak i $-$. Na następnej diagonalnej ($x + y = 1$) jest już więcej możliwości. Rozważmy przypadek, gdy na wierzchołku pojawia się $+$. Na mocy *VAR* następna diagonalna może mieć postać $\begin{matrix} & + & \\ + & & - \end{matrix}$ lub $\begin{matrix} & + & \\ - & & + \end{matrix}$. W pierwszym przypadku, trzecia diagonalna musi się zacząć od $+-$ (*UNIF*), zaś na mocy *CONT* diagonalna ta musi być wypełniona przez $-$. Procedura ta powtarza się, zatem otrzymujemy kwantyfikator **no**.

Analogicznie postępuje się w drugim przypadku otrzymując kwantyfikator **all**.

Analogicznie, przypadek, gdy na wierzchołku jest $-$, generuje kwantyfikatory **not all, some**.

Wykorzystywana literatura

- Barwise, J. 1975. *Admissible Sets and Structures. An Approach to Definability Theory*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- Barwise, J. 1979. On branching quantifiers in English. *Journal of Philosophical Logic* **8**, 47–80.
- Barwise, J. Cooper, R. 1981. Generalized quantifiers and natural language. *Linguistics and Philosophy* **4**, 159–219.
- Barwise, J., Feferman, S. 1985. *Model Theoretic Logics.* Springer.
- Bell, J.L. 2004. Infinitary Logic. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- van Benthem, J. 1984. Questions about quantifiers. *Journal of Symbolic Logic.* **49**, 443–466.
- van Benthem, J. 1986. *Essays in logical semantics.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- van Benthem, J. 1995. Quantifiers and Inference. W: Krynicki, Mostowski, Szczerba (eds.) *Quantifiers: logics, models and computation.*, 1–20.

Wykorzystywana literatura

- van Benthem, J., ter Meulen, A. (eds.) 1984. *Generalized quantifiers in natural language.* Foris Publications, Dordrecht.
- van Eijck, J. 1984. Generalized quantifiers and traditional logic. W: van Benthem, J., ter Meulen, A. (eds.) *Generalized quantifiers in natural language.*, 1–19.
- Gärdenfors, P. (ed.) 1987. *Generalized quantifiers: Linguistic and logical approaches.* Reidel, Dordrecht.
- Henkin, L. 1961. Some remarks on infinitely long formulas. *Infinitistic Methods*, Pergamon Press, Qxford, 167–183.
- Keenan, E.L., Stavi, J. 1986. A semantic characterization of natural language determiners. *Linguistics and Philosophy* **9**, 253–326.
- Keisler, H.J., Knight, J.L. 2004. Barwise: infinitary logic and admissible sets. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **10**, Number **1**, 4–36.
- Krynicki, M., Mostowski, M., Szczerba, L.W. (eds.) 1995. *Quantifiers: logics, models and computation.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht Boston London.

Wykorzystywana literatura

- Lindström, P. 1966. First order predicate logic with generalized quantifiers. *Theoria*, **32**, 186–195.
- Lindström, P. 1969. On Extensions of Elementary Logic. *Theoria*, **35**, 1–11.
- Mostowski, A. 1957. On generalization of quantifiers. *Fundamenta Mathematicae* **44**, 12–36.
- Shapiro, S. (ed.) 1996. *The limits of logic: higher-order logic and the Löwenheim-Skolem theorem.* Dartmouth Publishing Company, Aldershot.
- Tarski, A. 1986. What are logical notions? *History and Philosophy of Logic*, **7**, 143–154.
- Väänänen, J. 2004. Barwise: abstract model theory and generalized quantifiers. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume **10**, Number **1**, 37–53.
- Westerståhl, D. 1989. Quantifiers in formal and natural languages. *Handbook of Philosophucal Logic.* Vol. **IV**, 1–131.

Koniec

To było tylko pobieżne przedstawienie problematyki związanej z uogólnionymi kwantyfikatorami.

Zainteresowanych tą problematyką odsyłamy do zamieszczonej literatury przedmiotu.