Logika algebraiczna 1

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

2021

- Czym zajmuje się logika algebraiczna?
- Semantyczne aspekty logiki.
- Wyniki metalogiczne.
- Rola polskich logików w rozwoju logiki algebraicznej.

Studenci poznańskiej kognitywistyki poznają zagadnienia logiczne głównie w aspekcie teorio-dowodowym. Przygotowywane przez wykładowcę materiały do niniejszego wykładu mają (w zamierzeniu autora) stanowić uzupełnienie tej problematyki o aspekty semantyczne.

- Algebry i morfizmy. Podalgebry, kongruencje, algebry ilorazowe.
- Operacje na algebrach. Ultraprodukty.
- Kraty: rodzaje, własności, zbiory i elementy wyróżnione w kratach.
- Algebry Boole'a, algebry Heytinga, TB-algebry,...
- Ogólne operacje konsekwencji.
- Krata operacji konsekwencji.
- Matryce logiczne.
- Konsekwencje matrycowe.
- Problemy zupełności.
- Logika niefregowska.
- Algebry relacyjne.
- Algebraiczne ujęcia logiki pierwszego rzędu.
- Ontologie sytuacji.

- Zgodnie z bieżącymi zaleceniami, wykład odbywa się w formie zdalnej.
- Konsultacje z wykładowcą będą możliwe także w formie zdalnej.
- Wykład kończy się zaliczeniem z oceną.
- Podstawą zaliczenia wykładu jest samodzielnie napisany esej. Przykładowe tematy:
  - Rozumienia pojęcia stałej logicznej.
  - Wybrane systemy logiczne: geneza i zastosowania.
  - Rozumienia pojęcia zupełności systemu logicznego.
  - Semantyka logiczna: przegląd stanowisk.
  - Logika a ontologia.
  - Modele wynikania logicznego.
  - Własny temat eseju (po uzgodnieniu z prowadzącym zajęcia).

Podstawowa bibliografia podana jest na końcu prezentacji. Prezentacje poszczególnych wykładów będą zamieszczane w katalogu plików naszego zespołu w MS Teams.

Prehistoria:

- George Boole: *The mathematical analysis of logic*, 1847
- Augustus De Morgan: *Formal logic*, 1847
- George Boole: *Laws of thought*, 1854
- Charles Sanders Peirce: *(Logic of relatives)*, 1870
- Alexander Macfarlane: *Principles of the algebra of logic*, 1879
- Christine Ladd: *On the algebra of logic*, 1883
- Ernst Schröder: *Algebra der Logik*, 1895
- Clarence Lewis: *A survey of symbolic logic*, 1918
- Leopold Löwenheim: 1915,
- Thoralf Skolem: 1919, 1920, 1922,

W ciągu ostatnich stu lat głównie logicy polscy uzyskiwali znaczące wyniki w logice algebraicznej (Tarski, Łukasiewicz, Lindenbaum, Łoś, Suszko, Słupecki, Rasiowa,...). Wykorzystamy ustalenia z monografii Wójcicki 1984, Pogorzelski, Wojtylak 2008, Omyła 1986, Czelakowski 2001.

- Własności kraty operacji konsekwencji.
- Zależności między operacjami konsekwencji a matrycami.
- Istnienie matryc silnie adekwatnych.
- Problematyka zupełności.
- Korelaty semantyczne.

Zakładamy, że słuchacze zetknęli się już z następującymi zagadnieniami:

- Relacje: własności i operacje na relacjach.
- Typy porządków.
- Języki formalne: zmienne, termy, formuły.
- Aksjomaty, reguły wnioskowania, dowody, tezy, teorie.

Dalsze potrzebne pojęcia matematyczne będą omawiane w trakcie kolejnych wykładów.
Dzisiaj przypomnimy jedynie kilka elementarnych faktów o relacjach.

- Używamy standardowych oznaczeń dotyczących operacji na zbiorach, obrazów i przeciwobrazów zbiorów względem relacji (lub funkcji). Boolowskie operacje na relacjach zdefiniowane są tak samo, jak w przypadku dowolnych zbiorów.
- Jeśli $R \subseteq X \times Y$, to relacją odwrotną do R jest relacja $R^{-1} \subseteq Y \times X$ określona następująco: $xR^{-1}y$ wtedy i tylko wtedy, gdy yRx.
- Jeśli $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, to złożenie $R \circ S \subseteq X \times Z$ relacji R i S określone jest następująco: $xR \circ Sz$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $y \in Y$ taki, że xRy oraz ySz.
- Relacja $R \subseteq X \times X$ jest relacją *równoważności* (równoważnością) na X, gdy jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Jeśli R jest równoważnością na X i $x \in X$, to niech $[x]_R = \{y \in X : xRy\}$ (klasa R-równoważności elementu x) oraz $X/R = \{[x]_R : x \in X\}$ (podział zbioru X na klasy R-równoważności).

Operacja złożenia relacji jest łączna, tj.: $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$.
Operacja złożenia nie jest przemienna, tj. nie dla wszystkich relacji R_1 i R_2 zachodzi: $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
Udowodnimy, dla przykładu, że: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
Następujące warunki są równoważne, dla dowolnych relacji R oraz S oraz dowolnych x i y:

- $x(R \circ S)^{-1}y$
- $y(R \circ S)x$
- istnieje z taki, że yRz oraz zSx
- istnieje z taki, że zSx oraz yRz
- istnieje z taki, że $xS^{-1}z$ oraz $zR^{-1}y)$
- $x(S^{-1} \circ R^{-1})y$.

Otrzymujemy stąd zatem: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Niech $R \subseteq X \times X$. Przez id_X rozumiemy relację identyczności w X. *Przechodnim domknięciem relacji* R nazywamy relację R^{tr} zdefiniowaną indukcyjnie: $R^1 = R$, $R^{n+1} = R^n \circ R$, $R^{tr} = \bigcup_n R^n$.

Algebraiczna charakterystyka niektórych własności relacji:

- R jest zwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy $id_X \subseteq R$
- R jest przeciwzwrotna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap id_X = \emptyset$
- R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{-1}$
- R jest asymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap R^{-1} = \emptyset$
- R jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cap R^{-1} \subseteq id_X$
- R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$
- R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{tr}$
- R jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cup R^{-1} \cup id_X = X \times X$.

Udowodnimy, dla przykładu, że: złożenie $R_1 \circ R_2$ równoważności R_1 i R_2 jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
Najpierw pokazujemy, że jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.
Jeśli $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością, to zachodzą następujące równości:

$$R_1 \circ R_2 = (R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1} = R_2 \circ R_1.$$

Niech $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. Pokażemy, że $R_1 \circ R_2$ jest równoważnością.
Po pierwsze, mamy: $(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1} = R_1 \circ R_2$, tj. $R_1 \circ R_2$ jest symetryczna.
Po drugie, mamy:

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_1 \circ R_2) = R_1 \circ (R_2 \circ R_1) \circ R_2 = R_1 \circ (R_1 \circ R_2) \circ R_2 = (R_1 \circ R_1) \circ (R_2 \circ R_2) \subseteq R_1 \circ R_2,$$

tj. $R_1 \circ R_2$ jest przechodnia.
Zwrotność $R_1 \circ R_2$ jest oczywista, ponieważ R_1 oraz R_2 są zwrotne z założenia.

Relacja $R \subseteq X \times X$ jest:

- *preporządkiem*, gdy jest zwrotna i przechodnia;
- *częściowym porządkiem*, gdy jest antysymetrycznym preporządkiem;
- *ostrym częściowym porządkiem*, gdy jest przeciwzwrotna i przechodnia (wtedy jest też asymetryczna);
- *porządkiem liniowym*, gdy jest spójnym porządkiem częściowym;
- *ostrym porządkiem liniowym*, gdy jest spójnym ostrym porządkiem częściowym;
- *porządkiem dyskretnym*, gdy jest porządkiem liniowym i każdy element zbioru X ma bezpośredni R-poprzednik i bezpośredni R-następnik;
- *porządkiem gęstym*, gdy jest jest niepustym porządkiem liniowym i dla każdych $x \in X$, $y \in X$, jeśli xRy, to istnieje $z \in X$ taki, że xRz, zRy oraz $z \neq x$, $z \neq y$;
- *porządkiem ciągłym*, gdy jest liniowym porządkiem i każdy podzbiór zbioru X, który ma ograniczenie górne, ma też kres górny;
- *porządkiem dobrym*, gdy jest liniowym porządkiem i każdy niepusty podzbiór zbioru X ma element R-najmniejszy.

- Bergman, C. 2012. *Uniwersal algebra. Fundamentals and selected topics*. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton London New York.
- Burris, S., Sankappanavar, H.P. 1981. *A course in universal algebra*. Springer-Verlag.
- Cohn, P. 1965. *Universal algebra*. Harper & Row Publishers, New York Evanston London.
- Dunn, J.M, Hardegree, G.M. 2001. *Algebraic Methods in Philosophical Logic*. Clarendon Press, Oxford.
- Walendziak, A. 2009. *Podstawy algebry ogólnej i teorii krat*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

- Czelakowski, J. 2001. *Protoalgebraic logics.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.
- Łoś, J., Suszko, R. 1958. Remarks on sentential logics. *Indagationes Mathematicae* 20, 177–189.
- Omyła, M. 1986. *Zarys logiki niefregowskiej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej*. Wydawnictwo Filii Uniwersytetu Warszawskiego w Białymstoku, Białystok.
- Pogorzelski, W.A., Wojtylak, P. 2008. *Completeness theory for propositional logics.* Birkhäuser, Basel Boston Berlin.
- Rasiowa, H., Sikorski, R. 1963. *The mathematics of metamathematics.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Tarski, A. 2001. *Pisma logiczno-filozoficzne. Tom 2: Metalogika*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Wójcicki, R. 1984. *Lectures on propositional calculi.* Ossolineum, Wrocław.