Pewne ujęcie metody tablic analitycznych dla wybranych rachunków modalnych

ZAKŁAD LOGIKI STOSOWANEJ
INSTYTUT JĘZYKOZNAWSTWA UAM
2011-06-15

DR ROBERT SOCHACKI
INSTYTUT FILOZOFII UO

Kilka uwag o normalnych rachunkach modalnych

Stosować będziemy następującą beznawiasową symbolikę Łukasiewicza: *A – alternatywa, K – koniunkcja, C – implikacja, N –* negacja, *L – konieczność, M – możliwość*. Bierzemy pod uwagę modalne rachunki zdaniowe nadbudowane nad klasycznym rachunkiem zdań, z regułą podstawiania, regułą odrywania dla implikacji materialnej i regułą Gödla postaci: $(\alpha/L\alpha)$.

cd. o normalnych rachunkach modalnych

Z systemami modalnymi, zgodnie z ideą pochodzącą od Kripkego, można wiązać struktury relacyjne (U, R), gdzie: $U \neq \varnothing$ i $R \subseteq U \times U$. Zbiór U nazywamy zbiorem poziomów („światów”, stanów), zaś relację R – relacją dostępności (osiągalności). Wybór relacji R uzależniony jest od własności danego rachunku modalnego. Niech S będzie zbiorem wszystkich wyrażeń sensownych dowolnego rachunku modalnego. Na strukturze (U, R) określamy wartościowanie $V : S \times U \to \{0, 1\}$, które dla dowolnego $m \in U$ przyjmuje wartości:

cd. o normalnych rachunkach modalnych

- $V(p_i, m) = 0 \vee V(p_i, m) = 1,\ p_i \in S,$
- $V(N\alpha, m) = 1 \leftrightarrow V(\alpha, m) = 0,$
- $V(A\alpha\beta, m) = 1 \leftrightarrow (V(\alpha, m) = 1 \vee V(\beta, m) = 1),$
- $V(K\alpha\beta, m) = 1 \leftrightarrow (V(\alpha, m) = 1 \wedge V(\beta, m) = 1),$
- $V(C\alpha\beta, m) = 1 \leftrightarrow (V(\alpha, m) = 1 \rightarrow V(\beta, m) = 1),$
- $V(L\alpha, m) = 1 \leftrightarrow \forall_n (mRn \rightarrow V(\alpha, n) = 1),$
- $V(M\alpha, m) = 1 \leftrightarrow \exists_n (mRn \wedge V(\alpha, n) = 1).$

cd. o normalnych rachunkach modalnych

- Wyrażenie α należące do danego rachunku modalnego jest prawdziwe w strukturze relacyjnej (U, R) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $m \in U$ i dowolnego wartościowania V spełniony jest warunek $V(\alpha, m) = 1$.
- Wyrażenie α należące do danego rachunku modalnego jest *tautologią* tego rachunku, gdy jest prawdziwe w każdej strukturze relacyjnej określonego typu, tzn. z relacją R posiadającą określone własności.

cd. o normalnych rachunkach modalnych

Będziemy rozważać między innymi takie normalne rachunki modalne jak: ***K*** (rachunek Kripkego), ***K4***, ***S4***, ***S5***, ***S4.2***, ***S4.3***, $\boldsymbol{S4.3_n}$, $\boldsymbol{S4_n}$, $\boldsymbol{S5_n}$ (rachunki Lewisa), ***T*** (rachunek Feysa - von Wrighta), ***B*** (rachunek Brouwera), ***GL*** (Gődla-Lőba), ***D*** (rachunek deontyczny), a także wiele innych. Rozważane rachunki możemy traktować jako zbiory tez uzyskane za pomocą trzech reguł inferencji (RO, RP oraz RG) na bazie odpowiednich zbiorów aksjomatów. Poniżej podamy definicje niektórych z nich.

cd. o normalnych rachunkach modalnych

Niech symbol *Ax* oznacza zbiór aksjomatów klasycznego rachunku zdań. Przyjmujemy następujące określenia:

- $\boldsymbol{K} = Cn(Ax \cup \{CLCpqCLpLq\})$,
- $\boldsymbol{K4} = Cn(\boldsymbol{K} \cup \{CLpLLp\})$,
- $\boldsymbol{T} = Cn(\boldsymbol{K} \cup \{CLpp\})$,
- $\boldsymbol{S4} = Cn(\boldsymbol{K} \cup \{CLpp, CLpLLp\})$,
- $\boldsymbol{B} = Cn(\boldsymbol{T} \cup \{CNpLNLp\})$,
- $\boldsymbol{S5} = Cn(\boldsymbol{B} \cup \{CNLpLNLp\})$,

cd. o normalnych rachunkach modalnych

- $\boldsymbol{MV} = Cn(\boldsymbol{K} \cup \{AMLpLp\})$,
- $\boldsymbol{D} = Cn(\boldsymbol{K} \cup \{CLpNLNp\})$,
- $\boldsymbol{GL} = Cn(\boldsymbol{K4} \cup \{CLCLppLp\})$,
- $\boldsymbol{S4.2} = Cn(\boldsymbol{S4} \cup \{CMLpLMp\})$,
- $\boldsymbol{S4.3} = Cn(\boldsymbol{S4} \cup \{ALCLpqLCLqp\})$,
- $\boldsymbol{S4.3_n} = Cn(\boldsymbol{S4.2} \cup \{(Ax)_n\})$, $n \geq 0$, gdzie klasę wyrażeń $(Ax)_n$ definiujemy następująco (zob. G.E.Hughes, *Modal logics between S4.2 and S4.3*, BSL 9 (1980), 73–77):

cd. o normalnych rachunkach modalnych

- $(Ax)_n = ALCLp_o\,\Phi_n LCLp_1 p_o,\ n \geq O,$

gdzie wyrażenie Φ_n określone jest następująco:

$\Phi_o = p_1,\ \ \Phi_{k+1} = Cp_{k+1}LAp_{k+1}\Phi_k.$

Przyjmujemy umowę, że $p_o = p,\ p_1 = q,\ p_2 = r, \ldots, Aqq = q.$

Mamy więc:

- $\Phi_o = q,\ \Phi_1 = Cp_1LAp_1\Phi_o = CqLAqq = CqLq,$
  $\Phi_2 = Cp_2LAp_2\Phi_1 = CrLArCqLq.$
- $(Ax)_o = ALCLpqLCLqp,$
- $(Ax)_1 = ALCLp_o\Phi_1LCLp_1p_o = ALCLpCqLqLCLqp,$
- $(Ax)_2 = ALCLp_o\Phi_2LCLqp = ALCLpCrLArCqLqLCLqp.$

Pełność wybranych rachunków modalnych

Dla rozważanych tutaj normalnych rachunków modalnych zachodzą twierdzenia o pełności, głoszące identyczność zbioru tez oraz zbioru tautologii. Dowody tych twierdzeń dla poszczególnych rachunków opierają się w sposób istotny na własnościach relacji dostępności w zbiorach możliwych światów. Mamy zatem następujące twierdzenie:

TW.1 Wyrażenie α jest tezą:

- rachunku ***K*** wtw, gdy jest prawdziwe w dowolnych strukturach relacyjnych;

Pełność wybranych rachunków modalnych – cd.

- rachunku ***K4*** wtw, gdy jest prawdziwe w klasie struktur relacyjnych z relacją przechodnią;
- rachunku ***T*** wtw, gdy jest prawdziwe w klasie struktur relacyjnych z relacją zwrotną;
- rachunku ***S4*** wtw, gdy jest prawdziwe w klasie struktur relacyjnych z relacją zwrotną i przechodnią;
- rachunku ***B*** wtw, gdy jest prawdziwe w klasie struktur relacyjnych z relacją zwrotną i symetryczną;
- rachunku ***S5*** wtw, gdy jest prawdziwe w klasie struktur relacyjnych z relacją równoważnościową (tj. zwrotną, symetryczną i przechodnią);

Pełność wybranych rachunków modalnych – cd.

- rachunku ***GL*** wtw, gdy jest prawdziwe w klasie struktur relacyjnych z relacją mającą własność (*gl*);
- rachunku ***S4.2*** wtw, gdy jest prawdziwe w klasie struktur relacyjnych z relacją zwrotną, przechodnią i zbieżną;
- rachunku ***S4.3*** wtw, gdy jest prawdziwe w klasie struktur relacyjnych z relacją zwrotną, przechodnią i spójną;
- rachunku $\boldsymbol{S4.3_n}$ wtw, gdy jest prawdziwe w klasie struktur relacyjnych z relacją mającą własność ($s4.3_n$);
- rachunku $\boldsymbol{S4_n}$ wtw, gdy jest prawdziwe w klasie struktur relacyjnych z relacją mającą własność ($s4_n$);
- rachunku $\boldsymbol{S5_n}$ wtw, gdy jest prawdziwe w klasie struktur relacyjnych z relacją mającą własność ($s5_n$).

Metody weryfikacji formuł w rachunkach modalnych

- metoda syntaktyczna (pewna formuła jest tezą wtw gdy posiada dowód formalny na gruncie przyjętych aksjomatów i reguł inferencji),
- metoda tablicowa (metoda drzew analitycznych) o charakterze apagogicznym, przy założeniu, że dla danego rachunku zachodzi twierdzenie o pełności (tutaj istnieje wiele modyfikacji tej metody – opis i historię tej metody można znaleźć w R. Goré, *Tableau methods for modal and temporal logics, in:* M. D'Agostino et. al. (eds.), *Handbook of tableau methods,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1999, 297–396),
- metoda logiki pytań (zob. D. Leszczyńska: *The method of socratic proofs for normal modal propositional logics,* Rozprawa doktorska, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra 2006).

Metoda tablicowa oparta na pojęciach „uznawania" i „odrzucania" formuł

Przyjmujemy, że dowolne wyrażenie rachunku modalnego może być uznane lub odrzucone w pewnym stopniu (na pewnym poziomie lub w pewnym „świecie"). Symbolami $\vdash^m\alpha$ i $\dashv^m\alpha$ oznaczać będziemy odpowiednio wyrażenie uznane na m-tym poziomie (w m-tym „świecie") i wyrażenie odrzucone na m-tym poziomie (w m-tym „świecie"). Dalej przedstawimy pewne reguły dekompozycji wyrażeń na wyrażenia prostsze w odniesieniu do każdego spójnika zdaniowego.

Reguły dekompozycji wyrażeń

- dla negacji: $(N^{\vdash})\ \dfrac{\vdash^m N\alpha}{\dashv^m \alpha}$, $(N^{\dashv})\ \dfrac{\dashv^m N\alpha}{\vdash^m \alpha}$

- dla alternatywy $(A^{\vdash})\ \dfrac{\vdash^m A\alpha\beta}{\vdash^m \alpha \quad \vdash^m \beta}$, $(A^{\dashv})\ \dfrac{\dashv^m A\alpha\beta}{\begin{array}{c}\dashv^m \alpha \\ \dashv^m \beta\end{array}}$

Reguły dekompozycji wyrażeń

- dla koniunkcji: $(K^{\vdash})\ \dfrac{\vdash^m K\alpha\beta}{\begin{matrix}\vdash^m \alpha \\ \vdash^m \beta\end{matrix}}$, $\quad (K^{\dashv})\ \dfrac{\dashv^m K\alpha\beta}{\dashv^m \alpha \quad \dashv^m \beta}$

- dla implikacji: $(C^{\vdash})\ \dfrac{\vdash^m C\alpha\beta}{\dashv^m \alpha \quad \vdash^m \beta}$, $\quad (C^{\dashv})\ \dfrac{\dashv^m C\alpha\beta}{\begin{matrix}\vdash^m \alpha \\ \dashv^m \beta\end{matrix}}$

Reguły dekompozycji wyrażeń

- dla konieczności: $(L^{\vdash})\ \dfrac{\vdash^m L\alpha}{\forall_n(mRn \to \vdash^n \alpha)}$, $(L^{\dashv})\ \dfrac{\dashv^m L\alpha}{\exists_n(mRn \land \dashv^n \alpha)}$
- dla możliwości: $(M^{\vdash})\ \dfrac{\vdash^m M\alpha}{\exists_n(mRn \land \vdash^n \alpha)}$, $(M^{\dashv})\ \dfrac{\dashv^m M\alpha}{\forall_n(mRn \to \dashv^n \alpha)}$

Trochę ideologii

Powyższe reguły pozwalają dokonać rozkładu wyrażenia $\dashv^m \alpha$ ($\alpha \in S$) na wyrażenia prostsze. Powstaje w ten sposób drzewo rozkładu o postaci szeregowej (koniunkcyjnej) lub równoległej (alternatywnej). Rozkład równoległy otrzymuje się przy stosowaniu reguł np. $A^{\vdash}$ oraz $K^{\dashv}$. Dekompozycja danego wyrażenia znakowanego polega na wielokrotnym stosowaniu powyższych reguł w odniesieniu do wszystkich funktorów występujących w danym wyrażeniu.

cd. ideologii

Osiągalność jednego „świata" z innego „świata" będziemy określali za pomocą relacji R o pewnych własnościach (skorzystamy tutaj z semantyk Kripkego dla rachunków modalnych). Aby zaznaczyć fakt, iż świat k-ty jest osiągalny (dostępny) ze świata m-tego, będziemy pisać mRk. Badanie dowolnej formuły α rachunku modalnego będzie miało charakter apagogiczny. Aby zbadać, czy dana formuła jest tezą danego rachunku modalnego założymy, że jest ona odrzucona w pewnym świecie m. Stosując podane poprzednio reguły dekompozycji otrzymamy drzewo rozkładu

cd. ideologii

wyrażenia $\dashv^{m}\alpha$. Jeżeli na pewnej „gałęzi" drzewa rozkładu badanej formuły wystąpią wyrażenia postaci $\dashv^{k}\alpha$ oraz $\vdash^{k}\alpha$ dla pewnego świata *k*, to będziemy mówili, że dana gałąź jest zamknięta (albo zawiera sprzeczność) . W przeciwnym przypadku, że jest otwarta. Jeżeli każda gałąź drzewa jest zamknięta, to będziemu mówili, że drzewo rozkładu jest zamknięte, w przeciwnym przypadku, że jest otwarte.

twierdzenie o pełności

Zachodzi następujące twierdzenie:

TW.2

Wyrażenie α jest tezą danego rachunku modalnego wtedy i tylko wtedy, gdy drzewo rozkładu wyrażenia $\dashv^{m} \alpha$ jest zamknięte (tj. wszystkie gałęzie tego drzewa zawierają sprzeczność), przy założeniu, że relacja R występująca w regułach dekompozycji (tj. regułach uznawania i odrzucania) jest dowolną relacją charakterystyczną dla rachunku modalnego.

Przykłady weryfikowania formuł

przykład 1.

Wykazać, że wyrażenie *CLpNLNp* jest tezą rachunku ***D***.

(przypomienie: twierdzenie o pełności dla rachunku modalnego ***D*** ma postać: formuła α jest tezą sytemu ***D*** wtw, gdy jest prawdziwa w klasie struktur relacyjnych z relacją seryjną, tzn spełniającą warunek:

R jest seryjna wtw, gdy $\forall x \in U \exists y \in U\,(xRy))$

1. $\dashv^m CLpNLNp$ {zał.}
2. $\vdash^m Lp$ $\{1, C^{\dashv}\}$
3. $\dashv^m NLNp$ $\{1, C^{\dashv}\}$
4. $\forall_n(mRn \rightarrow \vdash^n p)$ $\{2, L^{\vdash}\}$
5. $\vdash^m LNp$ $\{3, N^{\dashv}\}$

cd. przykładu 1

6.	$\forall_k (mRk \rightarrow \vdash^k Np)$	$\{5, L^{\vdash}\}$
7.	$\exists s\ (mRs)$	$\{R$ – seryjna$\}$
8.	mRs_1	$\{7\}$
9.	$\vdash^{s_1} p$	$\{4, 8\}$
10.	$\vdash^{s_1} Np$	$\{6,8\}$
11.	$\dashv^{s_1} p$	$\{10, N^{\vdash}\}$
	sprzeczność	$\{9, 11\}$

przykład 2.

Wykazać, że aksjomat *ALCLpCqLqLCLqp* rachunku $S4.3_1$ nie jest tezą rachunku *S4.2* (przypomienie: twierdzenie o pełności dla rachunku modalnego ***S4.2*** ma postać: formuła α jest tezą sytemu ***S4.2*** wtw gdy α jest prawdziwa w klasie struktur relacyjnych z relacją zwrotną, przechodnią i zbieżną, tzn spełniającą warunki: $\forall x \in U\, (xRx)$; $\forall x,y,z \in U\, [(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz]$ oraz ostatni na zbieżność postaci: $\forall x,y,z \in U\, [(xRy \wedge xRz) \rightarrow \exists t \in U\, (yRt \wedge zRt)]$)

1. $\dashv^m$ *ALCLpCqLqLCLqp* {zał.}
2. $\dashv^m$ *LCLpCqLq* {1, $A^{\dashv}$}
3. $\dashv^m$ *LCLqp* {1, $A^{\dashv}$}

cd. przykładu 2

4.	$\exists k\,(mRk \wedge \dashv^{k} CLpCqLq)$	$\{2, L^{\vdash}\}$
5.	mRk_1	$\{4\}$
6.	$\dashv^{k_1} CLpCqLq$	$\{4\}$
7.	$\vdash^{k_1} Lp$	$\{6, C^{\dashv}\}$
8.	$\dashv^{k_1} CqLq$	$\{6, C^{\dashv}\}$
9.	$\vdash^{k_1} q$	$\{8, C^{\dashv}\}$
10.	$\dashv^{k_1} Lq$	$\{8, C^{\dashv}\}$
11.	$\exists l\,(k_1 Rl \wedge \dashv^{l} q)$	$\{10, L^{\vdash}\}$
12.	$k_1 Rl_1$	$\{11\}$
13.	$\dashv^{l_1} q$	$\{11\}$

cd. przykładu 2

14.	$\exists n\,(mRn \wedge \dashv^{n} CLqp)$	$\{3, L^{\vdash}\}$
15.	mRn_1	$\{14\}$
16.	$\dashv^{n_1} CLqp$	$\{14\}$
17.	$\vdash^{n_1} Lq$	$\{16, C^{\dashv}\}$
18.	$\dashv^{n_1} p$	$\{16, C^{\dashv}\}$
19.	$\forall_s (n_1Rs \rightarrow \vdash^{s} q)$	$\{17, L^{\vdash}\}$
20.	mRl_1	{5, 12, *R*- przechodnia}
21.	$\exists w\,(n_1Rw \wedge l_1Rw)$	{15, 20, *R*- zbieżna}
22.	$n_1Rw_1 \wedge l_1Rw_1$	$\{21\}$
23.	$\vdash^{w_1} q$	$\{22, 19\}$

cd. przykładu 2

24. $\forall_v(k_1Rv \rightarrow \vdash^v p)$ $\{7, L^{\vdash}\}$

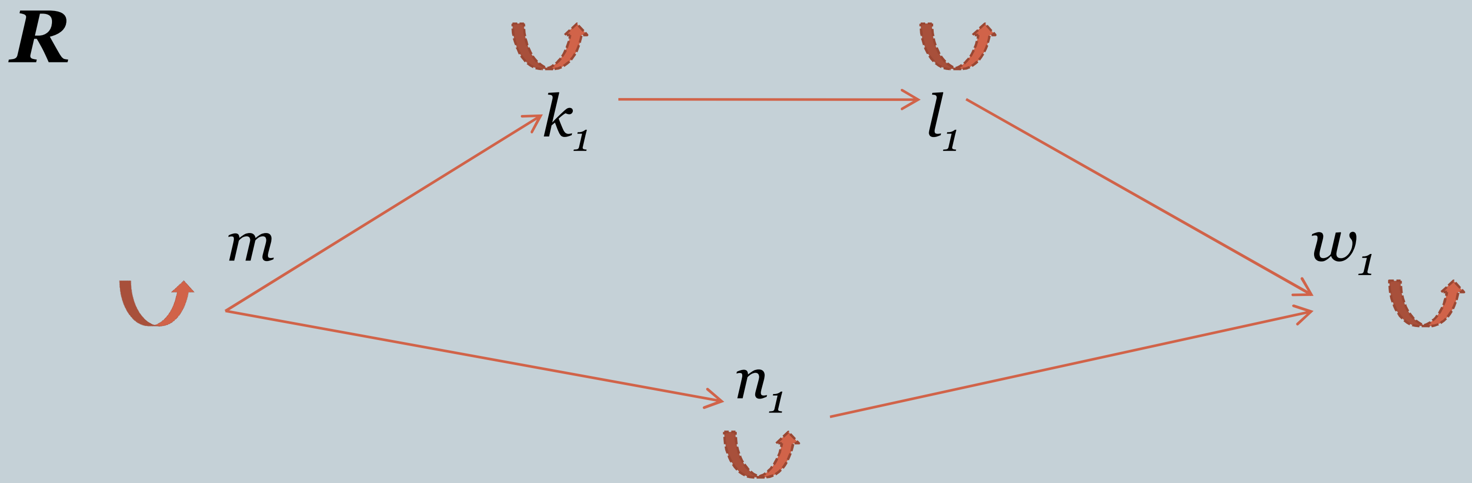
25. k_1Rw_1 $\{12, 22, R$ – przechodnia$\}$

26. $\vdash^{w_1} p$ $\{24, 25\}$

brak sprzeczności

Na podstawie przeprowadzonego rozumowania można podać strukturę relacyjną (U, R) falsyfikującą badane wyrażenie. Niech $U=\{m, k_1, l_1, n_1, w_1\}$. Relacja R jest opisana za pomocą następującego grafu:

kontrmodel



Wartościowanie V określamy następująco

$V(p, m)=V(p, k_1)= V(p, l_1)= V(p, w_1)= 1$ oraz $V(p, n_1)=0$

$V(q, m)=V(q, k_1)= V(q, n_1)= V(q, w_1)= 1$ oraz $V(q, l_1)=0$

kontrmodel

Przy tak przyjętym wartościowaniu mamy kolejno:

1. $V(Lq, n_1)=1$ oraz $V(p, n_1)=0$, {wybór V, graf R}
2. $V(CLqp, n_1)=0$, {1}
3. $V(LCLqp, m)=0$, {2, graf}
4. $V(Lq, k_1)=0$ oraz $V(q, k_1)=1$, {wybór V, graf R}
5. $V(CqLq, k_1)=0$, {4}
6. $V(Lp, k_1)=1$ {wybór V, graf R}
7. $V(CLpCqLq, k_1)=0$ {5, 6}

kontrmodel

8. $V(LCLpCqLq, m) = 0,$ {7, graf}

$V(ALCLpCqLqLCLqp, m) = 0$ {3, 8}

Przyjmijmy oznaczenia:

$\models \alpha :=$ formuła α jest tautologią rachunku modalnego

$\vdash \alpha :=$ drzewo rozkładu wyrażenia $\dashv^m \alpha$ jest zamknięte

Zachodzi twierdzenie:

TW.3 $\vdash \alpha$ wtw $\models \alpha$

Definicja 1.

Niech g oznacza dowolną gałąź drzewa rozkładu wyrażenia $\dashv^m \alpha$, natomiast p niech oznacza zmienną zdaniową.

Jeśli $\dashv^m p \in g$, to przyjmujemy $V(p, m) = 0$;

jeśli $\vdash^m p \in g$, to przyjmujemy $V(p, m) = 1$.

Lemat 1. (dowód indukcyjny po złożoności formuły)

Dla dowolnej formuły α zachodzą warunki:

jeśli $\dashv^m \alpha \in g$, to $V(\alpha, m) = 0$;

jeśli $\vdash^m \alpha \in g$, to $V(\alpha, m) = 1$.

soundness and completeness

Niech (U, R) będzie strukturą relacyjną dla pewnego rachunku modalnego . Niech S^* będzie dowolnym niepustym zbiorem wyrażeń postaci $\dashv^u \alpha$ lub $\vdash^v \beta$, gdzie α, β są formułami rachunku modalnego, a $u, v \in U$. Będziemy mówili, że świat $m \in U$ spełnia zbiór $X \subseteq S^*$, jeśli każde wyrażenie zbioru X jest postaci $\vdash^m \gamma$, dla dowolnej formuły. Powiemy, że zbiór $X \subseteq S^*$ jest spełnialny w pewnym modelu Kripkego, jeśli istnieją w tym modelu światy spełniające zbiór X.

soundness and completeness

Powiemy, że gałąź g drzewa dowodowego D dla formuły α jest spełnialna, jeśli spełnialny jest jej zbiór punktów. Drzewo dowodowe D będziemy nazywać spełnialnym, jeśli będzie istnieć spełnialna gałąź w tym drzewie.

Lemat 2.

Niech D_1 będzie drzewem powstałym z drzewa D przez zastosowanie jednej z reguł dekompozycji. Jeśli drzewo D jest spełnialne, to drzewo D_1 też jest spełnialne.

soundness

Lemat 3.

Jeśli $\vdash \alpha$, to $\models \alpha$.

Dowód niewprost

Załóżmy, że $\vdash \alpha$. Wynika stąd, że drzewo dowodowe jest zamknięte, a zatem nie jest ono spełnialne. Z drugiej strony zakładamy, że α nie jest tautologią, czyli istnieje taki świat m, że $V(\alpha, m) = 0$. Stąd wynika, że $V(N\alpha, m) = 1$, czyli $N\alpha$ jest spełnialna. Na mocy Lematu 2 drzewo rozkładu wyrażenia $\vdash^{m} N\alpha$ jest spełnialne, co przeczy zamkniętości drzewa dowodowego dla formuły α.

completeness

Aby wykazać pełność naszej metody wprowadzimy kilka pomocniczych definicji oraz kilka lematów. Nasze reguły dekompozycji wyrażeń znakowanych możemy podzielić na cztery grupy:

koniunkcyjne: $K^{\vdash}$, $A^{\dashv}$,$C^{\dashv}$, $N^{\dashv}$;

alternatywne: $K^{\dashv}$, $A^{\vdash}$, $C^{\vdash}$, $N^{\vdash}$;

„każdy”: $L^{\vdash}$, $M^{\dashv}$;

„pewny”: $L^{\dashv}$, $M^{\vdash}$.

W dalszych rozważaniach przyjmijmy oznaczenie: ${}^{*}\alpha$ będzie oznaczać dowolną formułę α uznaną lub odrzuconą w pewnym świecie.

completeness

Definicja 2.

Niech $\Re$ będzie dowolną rodziną formuł znakowanych, tj. niech $\Re \subseteq \{X: X \subseteq S^*\}$. Rodzinę $\Re$ będziemy nazywali ***odrzuceniowo niesprzeczną*** , wtw gdy dla dowolnego $Y \in \Re$ spełnione będą warunki :

- dla dowolnej zmiennej zdaniowej p, co najwyżej jedna z formuł $\vdash^m p$ albo $\dashv^m p$ należy do Y , (dla dowolnego m);
- jeśli $^*\alpha \in Y$, to $Y \cup \{^*\beta\} \in \Re$, gdzie wyrażenie $^*\beta$ to dowolna formuła znakowana uzyskana z rozkładu koniunkcyjnego albo „każdy", albo jedna z formuł znakowanych z rozkładu alternatywnego.

Definicja 3.

Niech $\Re$ będzie rodziną odrzuceniowo niesprzeczną i niech $Z \subseteq S^*$. Będziemy mówili, że rodzina $\Re$ jest Z-zgodna jeśli dla każdego $X \in \Re$ i dla każdej formuły $\gamma \in Z$ zbiór $X \cup \{\gamma\} \in \Re$.

Zachodzą następujące fakty, które podamy bez dowodów (zob. P. Borowik, *Wybrane klasy logik skończenie wielowartościowych*, Wydawnictwo WSP w Częstochowie, Częstochowa 2003).

completeness

- FAKT 1.

Niech $\Re$ będzie rodziną zbiorów odrzuceniowo niesprzeczną dla pewnego rachunku modalnego. Jeżeli $X \in \Re$, to jest on spełnialny w pewnym modelu dla tego rachunku.

- FAKT 2.

Niech $\Re$ będzie rodziną odrzuceniowo niesprzeczną dla pewnego rachunku modalnego i niech $Z \subseteq S^*$ oraz rodzina $\Re$ jest Z-zgodna. Jeżeli $X \in \Re$, to jest on spełnialny w pewnym modelu $(U, R,$ V) dla tego rachunku, w którym każda formuła $\gamma \in Z$ jest spełnialna przez każdy możliwy świat $m \in U$.

WNIOSEK: Jeśli $Z \in \Re$, to istnieje taki model $\mathcal{M}$, w którym $\mathcal{M} \models Z$.

completeness

Lemat 4.

Jeśli $\models \alpha$, to $\vdash \alpha$.

Dowód.

Załóżmy, że $\nvdash \alpha$. Wobec powyższego dzrzewo dowodowe nie jest zamknięte. Istnieje zatem co najmniej jedna gałąź, której punkty tworzą zbiór odrzuceniowo niesprzeczny. Na mocy Faktu 2, zbiór ten ma model (kontrmodel), w którym badana formuła jest fałszywa (prawdziwa jest jej negacja). Na mocy definicji tautologii wynika, że $\nvDash \alpha$.