Metody Dowodzenia Twierdzeń I Automatyzacja Rozumowań

Konwersatorium 5: Tablice Analityczne

V rok kognitywistyki UAM

1 Reguły

1.1 KRZ

Reguły rozszerzania tablic analitycznych dla formuł bez kwantyfikatorów (dla języka KRZ) zapisanych w notacji Smullyana są następujące:

$$\frac{\neg\neg\psi}{\psi} \qquad \frac{\neg\top}{\bot} \qquad \frac{\neg\bot}{\top}$$

$$\begin{array}{c} \alpha \\ | \\ \alpha_1 \\ | \\ \alpha_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \beta \\ \diagup \quad \diagdown \\ \beta_1 \quad \beta_2 \end{array}$$

Ćwiczenie. Zapisz reguły dla α-formuł oraz β-formuł w przypadku poszczególnych funktorów prawdziwościowych oraz ich negacji.

Przypominamy tabelę składników formuł, zapisanych w jednolitej notacji:

α	α_1	α_2
$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ
$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	φ	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \leftarrow \psi)$	$\neg\varphi$	ψ
$\neg(\varphi \uparrow \psi)$	φ	ψ
$\varphi \downarrow \psi$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\varphi \nrightarrow \psi$	φ	$\neg\psi$
$\varphi \nleftarrow \psi$	$\neg\varphi$	ψ

β	β_1	β_2
$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\varphi \vee \psi$	φ	ψ
$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi$	ψ
$\varphi \leftarrow \psi$	φ	$\neg\psi$
$\varphi \uparrow \psi$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \downarrow \psi)$	φ	ψ
$\neg(\varphi \nrightarrow \psi)$	$\neg\varphi$	ψ
$\neg(\varphi \nleftarrow \psi)$	φ	$\neg\psi$

1.2 KRP

W przypadku języków pierwszego rzędu, dodajemy następujące reguły rozszerzania tablic analitycznych (w notacji Smullyana):

$$\begin{array}{c} \gamma \\ | \\ \gamma(t) \end{array} \qquad \text{(dla dowolnego termu zamkniętego języka } L^{\mathbf{par}}\text{)}$$

$$\begin{array}{c} \delta \\ | \\ \delta(a) \end{array} \qquad \text{(dla dowolnego nowego parametru } a\text{)}$$

Przypominamy jednolitą notację dla formuł z kwantyfikatorami:

γ	$\gamma(t)$	δ	$\delta(t)$
$\forall x\varphi$	$\varphi(x/t)$	$\exists x\varphi$	$\varphi(x/t)$
$\neg\exists x\varphi$	$\neg\varphi(x/t)$	$\neg\forall x\varphi$	$\neg\varphi(x/t)$

2 Wskazówki heurystyczne

Propozycja notacji podana została na wykładzie. Jeśli budzi jakieś wątpliwości, proszę pytać. Rozważane dalej przykłady powinny być pomocne w rozumieniu tej notacji oraz sprawnym posługiwaniu się nią.

Kolejność kroków budowania tablicy: (o ile to możliwe, to) najpierw reguły nierozgałęziające, potem rozgałęziające.

Oszczędzanie niepotrzebnej pracy: jeśli uzyskałaś na którejś gałęzi budowanej tablicy analitycznej parę formuł wzajem sprzecznych (lub $\perp$), to *zamknij tę gałąź.*

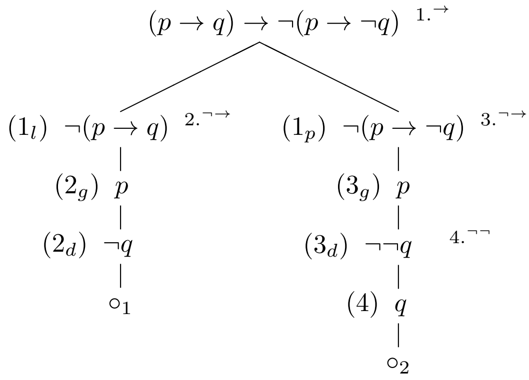
3 Dowody tablicowe

3.1 W KRZ

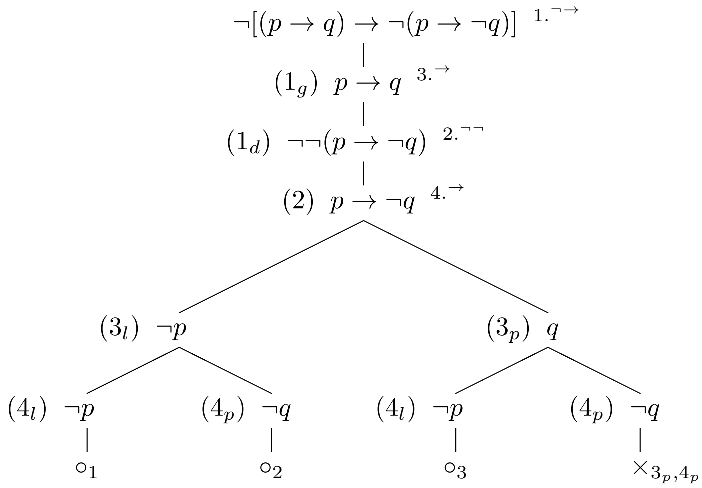
1. Zbudujemy tablice analityczne:

1. dla formuły $(p \to q) \to \neg(p \to \neg q)$ oraz
2. dla zaprzeczenia tej formuły, tj. dla formuły $\neg((p \to q) \to \neg(p \to \neg q))$.

Tablica analityczna dla $(p \to q) \to \neg(p \to \neg q)$:



Tablica analityczna dla $\neg((p \to q) \to \neg(p \to \neg q))$:



Żadna z tych tablic nie jest, jak widać, sprzeczna (zamknięta).

2. Zbudujemy dowód tablicowy prawa *modus ponendo ponens*:

$$((\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \to \psi$$

Konstruujemy zatem tablicę, w której korzeniu umieszczamy zaprzeczenie formuły $((\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \to \psi$:

$$\neg(((\varphi \to \psi) \land \varphi) \to \psi) \quad {}^{1.\neg\to}$$

$$(1_g)\ \ (\varphi \to \psi) \land \varphi \quad {}^{2.\land}$$

$$(1_d)\ \ \neg\psi$$

$$(2_g)\ \ \varphi \to \psi \quad {}^{3.\to}$$

$$(2_d)\ \ \varphi$$

$$(3_l)\ \ \neg\varphi \qquad\qquad (3_p)\ \ \psi$$

$$\times_{2_d,3_l} \qquad\qquad \times_{1_d,3_p}$$

Tablica jest sprzeczna, a więc $((\varphi \to \psi) \land \varphi) \to \psi$ jest tezą tablicową.

3. Zbudujemy tablicę analityczną dla zbioru:

$$S = \{p \land \neg r, p \to q, q \to r\}.$$

$$(0.1)\ \ p \land \neg r \quad {}^{1.\land}$$

$$(0.2)\ \ p \to q \quad {}^{2.\to}$$

$$(0.3)\ \ q \to r \quad {}^{3.\to}$$

$$(1_g)\ \ p$$

$$(1_d)\ \ \neg r$$

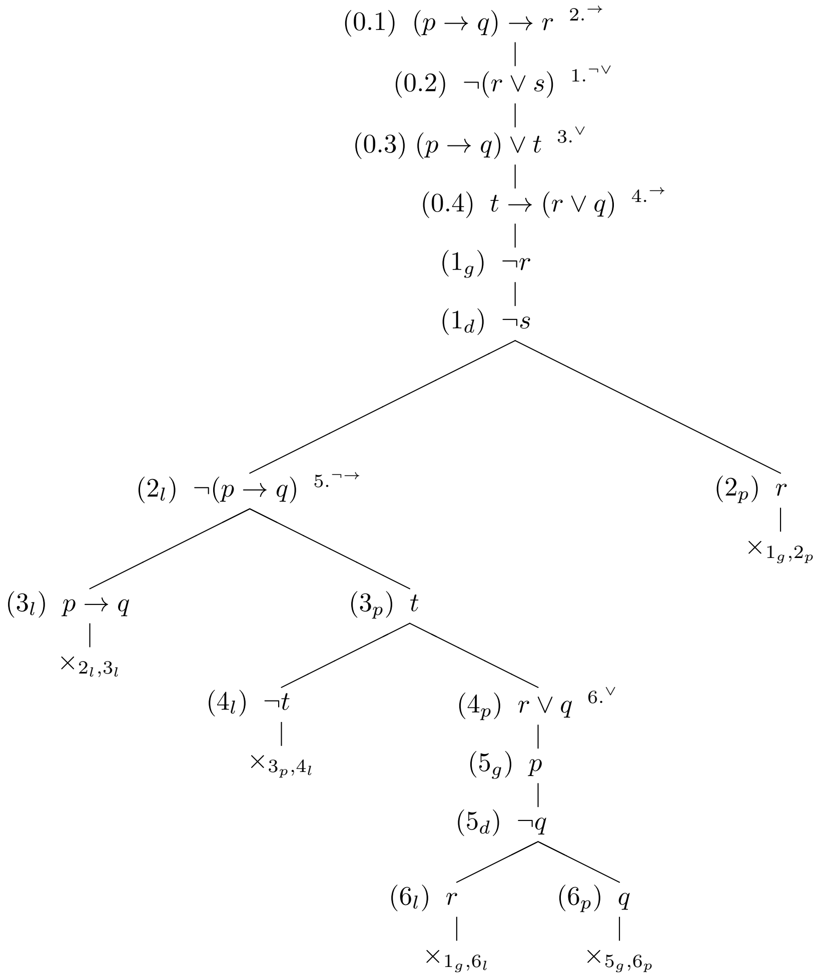
$$(2_l)\ \ \neg p \qquad\qquad (2_p)\ \ q$$

$$\times_{1_g,2_l} \qquad (3_l)\ \ \neg q \qquad (3_p)\ \ r$$

$$\times_{2_p,3_l} \qquad\qquad \times_{1_d,3_p}$$

4. Zbudujemy tablicę analityczną dla zbioru:

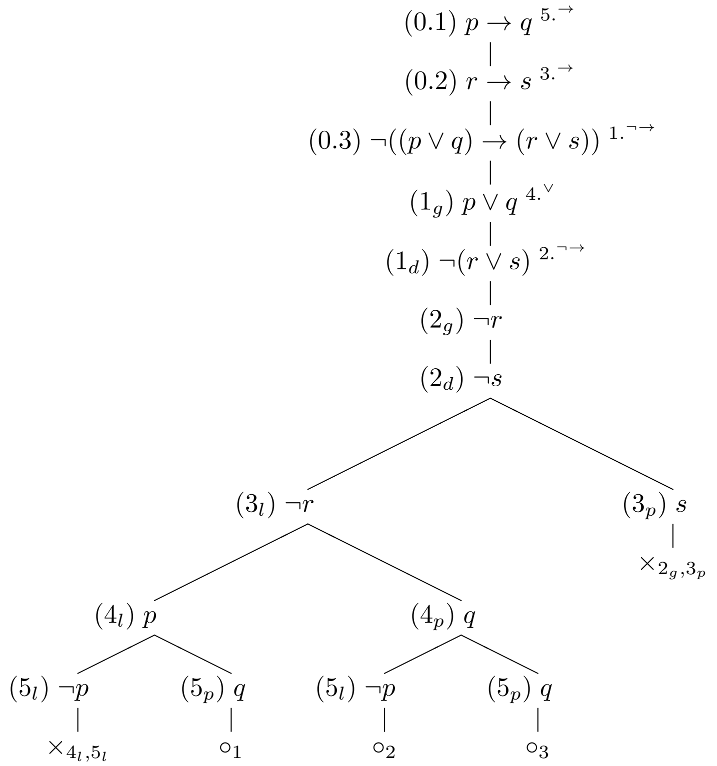
$$S = \{\ (p \to q) \to r,\ \neg(r \lor s),\ (p \to q) \lor t,\ t \to (r \lor q)\ \}.$$



5. Ustalimy czy wniosek wynika tablicowo z przesłanek:

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ r \to s \end{array}}{(p \lor q) \to (r \lor s)}$$

Budujemy zatem tablicę analityczną, rozpoczynając ją od przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:



Tablica nie jest zamknięta, a więc wniosek nie wynika tablicowo z przesłanek.

3.2 W logice pierwszego rzędu

1. Zbudujemy tablicę analityczną dla zbioru zdań: $\{\ \exists x \exists y\ ((P(x) \wedge \neg P(y)) \wedge \neg Q(x,y)),\ \forall x \forall y\ ((P(x) \wedge R(y)) \to Q(x,y)),\ \neg \exists x\ (\neg P(x) \wedge \neg R(x))\ \}$.

$$\exists x \exists y\ ((P(x) \wedge \neg P(y)) \wedge \neg Q(x,y))\ ^{1.\checkmark a}$$

$$\forall x \forall y\ ((P(x) \wedge R(y)) \rightarrow Q(x,y))\ ^{6.\star a}$$

$$\neg \exists x\ (\neg P(x) \wedge \neg R(x))\ ^{5.\star b}$$

$$(1)\quad \exists y\ ((P(a) \wedge \neg P(y)) \wedge \neg Q(a,y))\ ^{2.\checkmark b}$$

$$(2)\quad ((P(a) \wedge \neg P(b)) \wedge \neg Q(a,b))\ ^{3.\wedge}$$

$$(3_g)\quad P(a) \wedge \neg P(b)\ ^{4.\wedge}$$

$$(3_d)\quad \neg Q(a,b)$$

$$(4_g)\quad P(a)$$

$$(4_d)\quad \neg P(b)$$

$$(5)\quad \neg(\neg P(b) \wedge \neg R(b))\ ^{8.\neg\wedge}$$

$$(6)\quad \forall y\ ((P(a) \wedge R(y)) \rightarrow Q(a,y))\ ^{7.\star b}$$

$$(7)\quad (P(a) \wedge R(b)) \rightarrow Q(a,b)\ ^{11.\rightarrow}$$

$$(8_l)\quad \neg\neg P(b)\ ^{9.\neg\neg} \qquad\qquad (8_p)\quad \neg\neg R(b)\ ^{10.\neg\neg}$$

$$(9)\quad P(b) \qquad\qquad (10)\quad R(b)$$

$$\times_{4_d,9}$$

$$(11_l)\quad \neg(P(a) \wedge R(b))\ ^{12.\neg\wedge} \qquad\qquad (11_p)\quad Q(a,b)$$

$$\times_{3_d,11_p}$$

$$(12_l)\quad \neg P(a) \qquad\qquad (12_p)\quad \neg R(b)$$

$$\times_{4_g,12_l} \qquad\qquad \times_{10,12_p}$$

Zauważmy, że (na mocy prawa De Morgana) $\neg\exists x\ (\neg P(x) \wedge \neg R(x))$ jest równoważne zdaniu $\forall x\ (P(x) \vee R(x))$.

Niech predykat P będzie dumnie interpretowany jako własność *bycia Polakiem*, R jako własność *bycia obcokrajowcem*, zaś $Q(x,y)$ interpretujmy jako x *szydzi z* y. Otrzymujemy wtedy następujące brednie:

Pewien Polak nie szydzi z co najmniej jednego Niepolaka. Każdy Polak szydzi ze wszystkich obcokrajowców. Nikt nie jest jednocześnie Niepolakiem oraz nieobcokrajowcem.

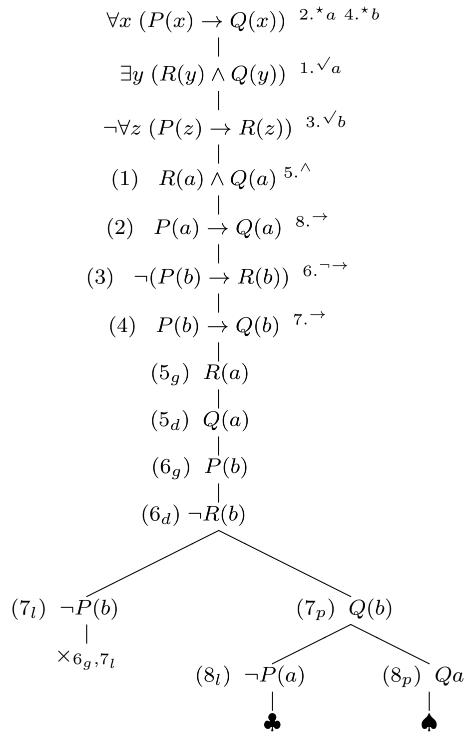
Po zastosowaniu prawa De Morgana do ostatniego z tych zdań otrzymujemy zgrabniejszy stylistycznie, ale w dalszym ciągu sprzeczny tekst:

Pewien Polak nie szydzi z kogoś, kto Polakiem nie jest. Wszyscy Polacy szydzą z każdego obcokrajowca. Każdy jest Polakiem lub obcokrajowcem.

2. Ustalimy czy wniosek wynika tablicowo z przesłanek:

$$\begin{array}{c} \forall x\ (P(x) \to Q(x)) \\ \exists y\ (R(y) \wedge Q(y)) \\ \hline \forall z\ (P(z) \to R(z)) \end{array}$$

Budujemy zatem tablicę analityczną, rozpoczynając ją od przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:



Tablica nie jest zamknięta, a zatem wniosek nie wynika tablicowo z przesłanek. Otwarte gałęzie tablicy pozwalają zbudować modele, w których prawdziwe są przesłanki, a fałszywy jest wniosek:

♣	P	Q	R
a	–	+	+
b	+	+	–

♠	P	Q	R
a	?	+	+
b	+	+	–

Ta notacja powinna być oczywista, dla przykładu:

1. Znak $+$ na przecięciu kolumny dla P oraz wiersza dla b w drugiej z tych tabelek oznacza, że na gałęzi ♠ znajduje się zdanie atomowe $P(b)$.
2. Znak $-$ na przecięciu kolumny dla R oraz wiersza dla b w drugiej z tych tabelek oznacza, że na gałęzi ♠ znajduje się zdanie atomowe $\neg R(b)$.
3. Znak ? na przecięciu kolumny dla P oraz wiersza dla a w drugiej z tych tabelek oznacza, że na gałęzi ♠ nie ma ani zdania atomowego $P(a)$ ani zdania atomowego $\neg P(a)$.

Zauważmy ponadto, że pierwsza przesłanka jest formułą typu γ, a więc należało zastosować do niej stosowną regułę zarówno dla stałej a, jak i dla stałej b.
3. *Ostatni walczyk w Międzyzdrojach*. Czy z przesłanek:

Każdy kogoś lubi. Niektórzy lubią tylko tych, którzy ich nie lubią.

wynika tablicowo wniosek: *Ktoś jest lubiany przez niesamoluba.*?

Znajdujemy strukturę składniową przesłanek i wniosku. Występuje tu tylko jeden predykat: czytajmy $L(x, y)$ jako x *lubi* y. Wtedy oczywiście $L(x, x)$ czytamy: x *lubi siebie* (przyjmijmy, że jest to równoznaczne z x *jest samolubem*). Badane wnioskowanie przebiega według następującego schematu:

$$\begin{array}{c} \forall x \exists y\ L(x, y) \\ \exists x \forall y\ (L(x, y) \rightarrow \neg L(y, x)) \\ \hline \exists x \exists y\ (L(y, x) \wedge \neg L(y, y)) \end{array}$$

Budujemy zatem tablicę analityczną, rozpoczynając ją od przesłanek oraz zaprzeczonego wniosku:

$$\forall x \exists y\, L(x,y) \quad ^{2.\star a}$$

$$\exists x \forall y\, (L(x,y) \to \neg L(y,x)) \quad ^{1.\checkmark a}$$

$$\neg \exists x \exists y\, (L(y,x) \wedge \neg L(y,y)) \quad ^{5.\star b}$$

$$(1) \quad \forall y (L(a,y) \to \neg L(y,a)) \quad ^{4.\star a\ 6.\star b}$$

$$(2) \quad \exists y\, L(a,y) \quad ^{3.\checkmark b}$$

$$(3) \quad L(a,b)$$

$$(4) \quad L(a,a) \to \neg L(a,a) \quad ^{10.\to}$$

$$(5) \quad \neg \exists y\, (L(y,b) \wedge \neg L(y,y)) \quad ^{7.\star a}$$

$$(6) \quad L(a,b) \to \neg L(b,a) \quad ^{8.\to}$$

$$(7) \quad \neg (L(a,b) \wedge \neg L(a,a)) \quad ^{9.\neg\wedge}$$

$$(8_l) \quad \neg L(a,b) \qquad \times_{3,8_l}$$

$$(8_p) \quad \neg L(b,a)$$

$$(9_l) \quad \neg L(a,b) \qquad \times_{3,9_l}$$

$$(9_p) \quad \neg\neg L(a,a)$$

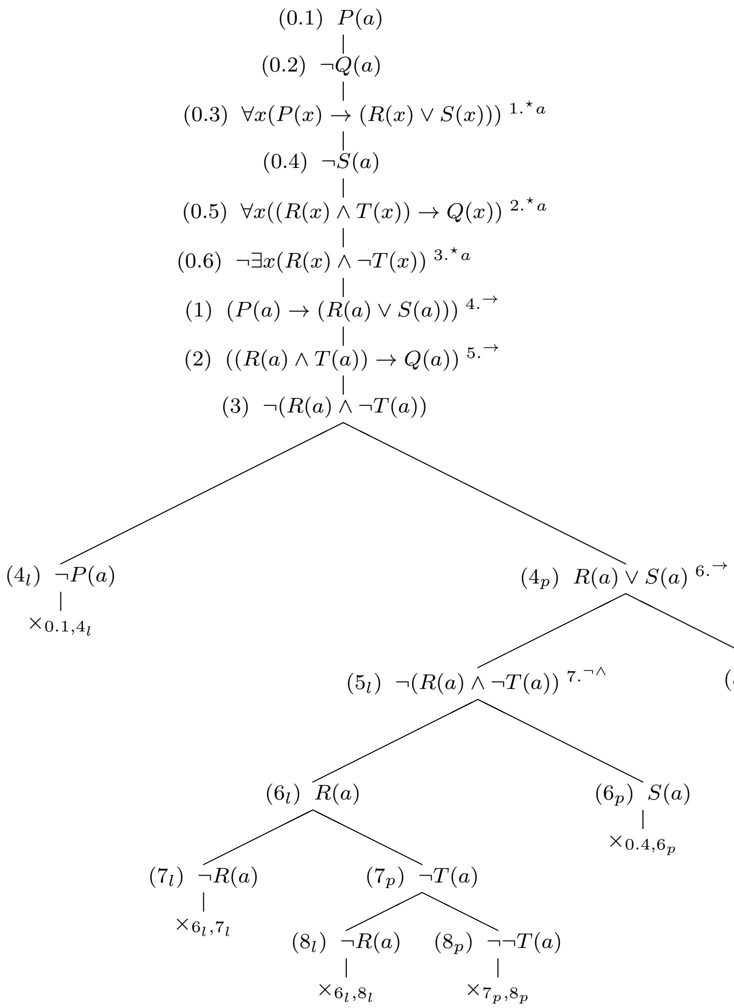
$$(10_l) \quad \neg L(a,a) \qquad \times_{9,10_l}$$

$$(10_p) \quad \neg L(a,a) \qquad \times_{9,10_p}$$

Tablica jest zamknięta, a zatem wniosek wynika tablicowo z przesłanek.

4. Zbudujemy tablicę analityczną dla zbioru formuł:

$$\{P(a), \neg Q(a), \forall x (P(x) \to (R(x) \vee S(x))), \neg S(a),$$
$$\forall x ((R(x) \wedge T(x)) \to Q(x)), \neg \exists x (R(x) \wedge \neg T(x))\}.$$



Tablica zamknięta. Zauważmy, że ponieważ w zdaniach naszego zbioru występowała stała a, więc należało dla niej zastosować regułę dla wszystkich γ-formuł w tablicy.

5. Spróbujemy zbudować tablicę analityczną dla zbioru zdań:

$$\{\ \forall x(P(x) \to Q(x)),\ \forall x\exists y(R(y) \wedge S(y,x)),\ \forall x((R(x) \wedge Q(x)) \to T(x)),$$
$$\forall x\forall y((T(y) \wedge S(y,x)) \to T(x)),\ \neg\forall x\forall y((\neg P(y) \to \neg S(x,y)) \to T(x))\}.$$

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))\ ^{4.\star a\ 5.\star b}$$

$$\forall x \exists y\ (R(y) \wedge S(y,x))\ ^{6.\star a\ 7.\star b}$$

$$\forall x\ ((R(x) \wedge Q(x)) \rightarrow T(x))\ ^{8.\star a\ 9.\star b}$$

$$\forall x \forall y\ ((T(y) \wedge S(y,x)) \rightarrow T(x))\ ^{10.\star a\ 11.\star b}$$

$$\neg(\forall x \forall y\ ((\neg P(y) \rightarrow \neg S(x,y)) \rightarrow T(x)))\ ^{1.\surd a}$$

$$(1)\ \ \neg \forall y\ ((\neg P(y) \rightarrow \neg S(a,y)) \rightarrow T(a))\ ^{2.\surd b}$$

$$(2)\ \ \neg((\neg P(b) \rightarrow \neg S(a,b)) \rightarrow T(a))\ ^{3.\neg\rightarrow}$$

$$(3_g)\ \ \neg P(b) \rightarrow \neg S(a,b)$$

$$(3_d)\ \ \neg T(a)$$

$$(4)\ \ P(a) \rightarrow Q(a)$$

$$(5)\ \ P(b) \rightarrow Q(b)$$

$$(6)\ \ \exists y\ (R(y) \wedge S(y,a))$$

$$(7)\ \ \exists y\ (R(y) \wedge S(y,b))$$

$$(8)\ \ (R(a) \wedge Q(a)) \rightarrow T(a)$$

$$(9)\ \ (R(b) \wedge Q(b)) \rightarrow T(b)$$

$$(10)\ \ \forall y\ ((T(a) \wedge S(y,a)) \rightarrow T(a))\ ^{12.\star a\ 13.\star b}$$

$$(11)\ \ \forall y\ ((T(y) \wedge S(y,b)) \rightarrow T(b))\ ^{14.\star a\ 15.\star b}$$

$$(12)\ \ (T(a) \wedge S(a,a)) \rightarrow T(a)$$

$$(13)\ \ (T(a) \wedge S(b,a)) \rightarrow T(a)$$

$$(14)\ \ (T(y) \wedge S(a,b)) \rightarrow T(b)$$

$$(15)\ \ (T(y) \wedge S(b,b)) \rightarrow T(b)$$

$$\vdots$$

Wykonaliśmy wszystkie kroki dotyczące γ-formuł oraz stałych a i b. Jest widoczne, że druga formuła zmusza do wprowadzania coraz to nowych stałych (tak, jak ma to miejsce w formułach (6) oraz (7) powyżej). W konsekwencji, nie można zakończyć budowy tablicy analitycznej w tym przypadku.

6. *Lawina miłości*. Jak się wydaje (przyjmując, że pasywizacja w języku naturalnym odpowiada braniu konwersu relacji), strukturze składniowej zdania *O ile choćby jeden osobnik jest zakochany sam w sobie, to jeśli każdy kogoś kocha, to ktoś jest kochany przez wszystkich* odpowiada następujące zdanie języka KRP:

$$(\bigstar) \qquad \exists x\ xK(x,x) \rightarrow (\forall x \exists y\ K(x,y) \rightarrow \exists y \forall x\ K(x,y))$$

Spróbujemy zbudować tablice analityczne: dla zdania (★) oraz dla jego zaprzeczenia. Najpierw tablica dla (★):

$$\exists x\ K(x,x) \to (\forall x \exists y\ K(x,y) \to \exists y \forall x\ K(x,y)) \quad ^{1.\to}$$

$$\begin{array}{ll}
(1_l)\ \neg\exists x\ K(x,x) \quad ^{2.\star a} & (1_p)\ \forall x \exists y\ K(x,y) \to \exists y \forall x\ K(x,y) \quad ^{3.\to} \\
\quad | & \\
(2)\ \neg K(a,a) & \begin{array}{ll}
(3_l)\ \neg\forall x \exists y\ K(x,y) \quad ^{4.\checkmark a} & (3_p)\ \exists y \forall x\ K(x,y) \quad ^{6.\checkmark a} \\
\quad | & \quad | \\
(4)\ \neg\exists y\ K(a,y) \quad ^{5.\star a} & (6)\ \forall x\ K(x,a) \quad ^{7.\star a} \\
\quad | & \quad | \\
(5)\ \neg K(a,a) & (7)\ K(a,a) \\
\quad | & \quad | \\
\quad \circ & \quad \circ
\end{array} \\
\quad | & \\
\quad \circ &
\end{array}$$

Zauważmy, że w lewej gałęzi tablicy nie mieliśmy do dyspozycji δ-formuły, pozwalającej wprowadzić nową stałą. W takiej sytuacji wprowadzamy nową stałą na mocy reguły dla γ-formuł. Otrzymana tablica nie jest zamknięta, a więc jej gałęzie otwarte (akurat wszystkie są otwarte) są spełnialne.

Zauważmy również, że możemy wprowadzać tę samą stałą dla δ-formuł, znajdujących się na różnych gałęziach (można też zawsze używać różnych stałych na poszczególnych gałęziach).

Teraz spróbujemy zbudować tablicę analityczną dla negacji zdania (★):

$$
\begin{array}{c}
\neg(\exists x\, K(x,x) \rightarrow (\forall x \exists y\, K(x,y) \rightarrow \exists y \forall x\, K(x,y))) \quad {}^{1.\neg\rightarrow} \\
| \\
(1_g)\ \ \exists x\, K(x,x) \quad {}^{3.\checkmark a_1} \\
| \\
(1_d)\ \ \neg(\forall x \exists y\, K(x,y) \rightarrow \exists y \forall x\, K(x,y)) \quad {}^{2.\neg\rightarrow} \\
| \\
(2_g)\ \ \forall x \exists y\, K(x,y) \quad {}^{4.\star a_1\ 8.\star a_2\ 10.\star a_3} \\
| \\
(2_d)\ \ \neg\exists y \forall x\, K(x,y) \quad {}^{5.\star a_1\ 9.\star a_2\ 11.\star a_3} \\
| \\
(3)\ \ K(a_1,a_1) \\
| \\
(4)\ \ \exists y\, K(a_1,y) \quad {}^{6.\checkmark a_2} \\
| \\
(5)\ \ \neg\forall x\, K(x,a_1) \quad {}^{7.\checkmark a_3} \\
| \\
(6)\ \ K(a_1,a_2) \\
| \\
(7)\ \ \neg K(a_3,a_1) \\
| \\
(8)\ \ \exists y\, K(a_2,y) \quad {}^{12.\checkmark a_4} \\
| \\
(9)\ \ \neg\forall x\, K(x,a_2) \quad {}^{13.\checkmark a_5} \\
| \\
(10)\ \ \exists y\, K(a_3,y) \quad {}^{14.\checkmark a_6} \\
| \\
(11)\ \ \neg\forall x\, K(x,a_3) \quad {}^{15.\checkmark a_7} \\
| \\
\vdots
\end{array}
$$

Nie można zakończyć budowy tej tablicy. W ten oto sposób jeden samolub uruchomił potężną (nieskończoną!) lawinę miłości. Czy potrafisz napisać *wzór na miłość* ukryty w tej konstrukcji? Mówiąc poważnie: czy potrafisz wskazać model, w którym prawdziwa byłaby negacja zdania (★)?

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM

www.kognitywistyka.amu.edu.pl

http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka

pogon@amu.edu.pl

Wybrane pozycje bibliograficzne

Annelis, I.A. 1990. From Semantic Tableaux to Smullyan Trees: A History of the Development of the Falsifiability Tree Method. *Modern Logic* **1**, 36–69.

Bell, J.L., Machover, M. 1977. *A Course in Mathematical Logic.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam New York Oxford.

Beth, E.W. 1955. *Semantic Entailment and Formal Derivability.* Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van wetenschapen, afd. letterkunde, new series, vol. **18**, no. **13**, Amsterdam.

Fitting, M. 1990. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving.* Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong Kong.

Gentzen, G. 1935. Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* **39**, 176–210, 405–431.

Georgacarakos, G.N., Smith, R. 1979. *Elementary Formal Logic.* McGraw-Hill Book Company.

Handbook of Automated Reasoning. 2001. A. Robinson, A. Voronkov (eds.), Elsevier, Amsterdam London New York Oxford Paris Shannon Tokyo, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Handbook of Tableau Methods. 1999. Edited by: D'Agostino, M., Gabbay, D.M., Hähnle, R., Posegga, J., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.

Hintikka, J. 1955. Form and Content in Quantification Theory. *Acta Philosophica Fennica* **8**, 7–55.

Hodges, W. 1977. *Logic.* Pelican Books.

Howson, C. 1997. *Logic with trees.* Routledge, London and New York.

Jeffrey, R. 1991. *Formal Logic: Its Scope and Limits.* McGraw-Hill, New York.

Kleene, S.C. 1967. *Mathematical Logic.* John Wiley & Sons, Inc. New York London Sydney.

Kripke, S. 1959. A Completeness Theorem in Modal Logic. *Journal of Symbolic Logic* **24**, 1–14.

Lis, Z. 1960. Wynikanie semantyczne a wynikanie formalne. *Studia Logica* **X**, 39–60.

Marciszewski, W., Murawski, R. 1995. *Mechanization of Reasoning in a Historical Perspective.* Rodopi, Amsterdam – Atlanta.

Nerode, A., Shore, R.A. 1997. *Logic for Applications.* Graduate Texts in Computer Science, Springer.

Pawlak, Z. 1965. *Automatyczne dowodzenie twierdzeń.* Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa (seria: *Biblioteczka Matematyczna*, **19**).

Porębska, M., Suchoń, W. 1991. *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Priest, G. 2001. *An Introduction to Non-Classical Logic.* Cambridge University Press.

Quine, W.V. 1955. A proof procedure for quantification theory. *The Journal of Symbolic Logic* Volume **20**, Number **2**, 191–149.

Rasiowa, H., Sikorski, R. 1960. On the Gentzen Theorem. *Fundamenta Mathematicae* **48**, 58–69.

Rasiowa, H., Sikorski, R. 1963. *The Mathematics of Metamathematics.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Smullyan, R. 1968. *First-Order Logic.* Springer Verlag, Berlin.

Schütte, K. 1956. Ein System des verknüpfenden Schliessens. *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschungen* **2**, 56–67.

Wang, H. 1960. Toward Mechanical Mathematics. *IBM Journal Research and Development* **4**, 2–22.