Postulatyści Amerykańscy

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

KHL 62

Plan na dziś

- Omawiamy prace niektórych matematyków amerykańskich, publikowane w trzech pierwszych dekadach XX wieku w *Transactions of the American Mathematical Society*.
- Szczególną uwagę poświęcamy wyłanianiu się pojęć metalogicznych (kategoryczności oraz zupełności).

- Odczyt stanowi streszczenie fragmentu części pierwszej przygotowywanej rozprawy *Extremal Axioms*.
- Oprócz oryginalnych tekstów źródłowych wykorzystujemy też ustalenia z: Awodey, Reck 2002, Corcoran 1981, Scanlan 1991, 2003, Tarski 1940.

Projekt badawczy NCN

- Odczyt został przygotowany w ramach projektu badawczego NCN 2015/17/B/HS1/02232:
  Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne, matematyczne i kognitywne.
- Projekt jest realizowany w Zakładzie Logiki i Kognitywistyki UAM (2016–2018).
- Strona projektu: http://logic.amu.edu.pl/index.php/Ncn2015jp

- W ramach projektu przewiduje się dwa skromne stypendia dla doktorantów, ewentualnie zainteresowanych współpracą.
- Konkurs zostanie ogłoszony pod koniec 2016 roku.

Matematyczne korzenie badań logicznych

Matematyka w Europie w XIX wieku

- Trend algebraiczny w logice
- Aksjomaty dla systemów liczbowych
- Rewolucyjne zmiany w algebrze, geometrii i analizie

Matematyka w USA w XIX wieku

- Ośrodki akademickie oraz wybitni matematycy
- American Mathematical Society (1888)
- *Transactions of the American Mathematical Society* (1900)

Prapoczątki metalogiki

- Gottlob Frege, Bertrand Russell: logika jest jedna i uniwersalna.
- Gregorius Itelson (1904): Moreover, no science, no theory can be prior to or higher than Logic, which is the foundation of any science and of any theory; one can say, in parodying the word of Pascal: that which surpasses Logic surpasses us; thus there cannot be *metalogic*.
- Gerhard Stammler (1928): There is no metalogic as extralogical grounding of logic. Logic stands for itself.

- Pierwsze wyniki w metalogice: Löwenheim 1915, Skolem 1919, Bernays 1918, Post 1920.
- Carnap: *Versuch einer Metalogik* (1931).

Alfred Tarski: Początek Przygód Metalogicznych.

Postulatyści Amerykańscy

- Eliakim Hastings Moore (1862–1932). Postulaty dla: grup oraz geometrii n-wymiarowej. Później: prace z analizy matematycznej.
- Oswald Veblen (1880–1960). Postulates for: geometrii euklidesowej oraz rzutowej, kontinuum oraz zbiorów dobrze uporządkowanych. Później: prace z topologii algebraicznej oraz geometrii różniczkowej.
- Edward Vermilye Huntington (1874–1952). Postulaty dla: grup, ciał, dodatnich liczb całkowitych i wymiernych, geometrii, wielkości ciągłych, algebry zespolonej, algebr Boole'a.
- Leonard Eugene Dickson (1874–1954). Postulaty dla: grup, ciał, łącznych algebr liniowych. Liczne prace dotyczące algebr z dzieleniem oraz algebraicznej teorii liczb.

Eliakim Hastings Moore

Leonard Eugene Dickson

Oswald Veblen

Edward Vermilye Huntington

Kilka dalszych postaci

- Robert Lee Moore (1882–1974)
- B. A. Bernstein (1881–1964)
- Earle Raymond Hedrick (1876–1943)
- John Robert Kline (1891–1955)
- Henry Maurice Sheffer (1882–1964)

- John Wesley Young (1879–1932)
- Cassius Jackson Keyser (1862–1947)
- Cooper Harold Langford (1895–1964)
- Norbert Wiener (1894–1964)

Cooper Harold Langford

Robert Lee Moore

Wybrane prace

Prace Postulatystów Amerykańskich są dostępne on line na stronach *Transactions of the American Mathematical Society*.

- Dickson, L.E. 1905. Definitions of a group and a field by independent postulates. *Transactions of the American Mathematical Society* **6**, 198–204.
- Moore, E.H. 1902. On the projective axioms of geometry. *Transactions of the American Mathematical Society* **3**, 142–158.
- Huntington, E.V. 1902. A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude. *Transactions of the American Mathematical Society* **3**, 264–279.
- Veblen, O. 1904. A system of axioms for geometry. *Transactions of the American Mathematical Society* **5**, 343–384.

Cytaty: Huntington

- *A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude* (1902): The object of the work which follows is to show that these six postulates form a *complete set*; that is, they are (I) *consistent*, (II) *sufficient*, (III) *independent* (or *irreducible*). By these three terms we mean: (I) there is at least one assemblage in which the chosen rule of combination satisfies all the six requirements; (II) there is essentially *only one* such assemblage possible; (III) none of the six postulates is a consequence of the other five.
- Powyższy cytat jest reprezentatywny dla wszystkich prac Postulatystów Amerykańskich dotyczących zestawów postulatów.

Cytaty: Huntington

A set of postulates for ordinary complex algebra (1905): In the case of any categorical set of postulates one is tempted to assert the theorem that if any proposition can be stated in terms of the fundamental concepts, either it is itself deducible from the postulates, or else its contradictory is so deducible; it must be admitted, however, that our mastery of the processes of logical deduction is not yet, and possibly never can be, sufficiently complete to justify this assertion.

A set of postulates for real algebra, comprising postulates for a one-dimensional continuum and for the theory of groups (1905): In conclusion, it should be noticed that the eight postulates of § 2 form a "disjunctive", not a "categorical" set; for an abelian group may contain any finite number of elements, or be infinite; and even if the number of elements in two groups is the same, the groups are not necessarily isomorphic; hence there are many propositions concerning K and $+$ which are neither deducible from these postulates, nor in contradiction with them.

Cytaty: Veblen

- *A system of axioms for geometry* (1904): [...] any proposition which can be made in terms of points and order either is in contradiction with our axioms or is equally true of all classes that verify our axioms. The validity of any possible statement in these terms is therefore completely determined by the axioms; and so any further axiom would have to be considered redundant. [Footnote: *Even were it not deducible from the axioms by a finite number of syllogisms.*] Thus, if our axioms are valid geometrical propositions, they are sufficient for the complete determination of euclidian geometry.
- *The foundations of geometry: A historical sketch and a simple example* (1906): But if a proposition is a consequence of the axioms, can it be derived from them by a syllogistic process? Perhaps not.

Uwaga: *syllogistic process* należy tu rozumieć jako *dowód*.

Cytaty: Veblen

- *Euclid's parallel postulate* (1905): How shall we use the word exist? There is a technical usage which says that a mathematical science ...exists if no two propositions deducible from its hypotheses are in contradiction. In this sense (due to Hilbert) we are able to say that all mathematical sciences exist if arithmetic exists – i.e., the science of positive whole numbers. One is tempted to say that surely the whole numbers $1, 2, 3, \ldots$ etc. exist. But what would be the content of such statement? And do we know these numbers except by the propositions which we wish to prove consistent?

Cytowane za: Scanlan 1991, 992.

Co jest najbardziej podstawowe?

Algebra

- E.H. Moore: tabliczka działania (rule of combination) dla grup.
- Huntington: działania: $\circ$ (grupy); $\oplus$ oraz $\odot$ (ciała); $\oplus$, $\odot$ oraz relacja $<$ (algebra logiki); relacja ternarna (grupy).
- Dickson: funkcja $\circ$ (grupy); funkcje $\oplus$ oraz $\otimes$ (ciała); liniowo niezależne jednostki lub współrzędne (łączne algebry liniowe).

Geometria

- E.H. Moore: punkty, proste, odcinki.
- Veblen: punkty i porządek (relacja *leżenia między*).
- Huntington: sfery oraz inkluzja.

Rozumowania matematyczne

- Współczesny czytelnik może bez trudności czytać omawiane teksty, choć napisane zostały ponad sto lat temu.
- Postulatyści Amerykańscy deklarowali korzystanie z formalizmu logicznego w przygotowywaniu dowodów, ale (z nielicznymi wyjątkami) nie używali go w publikacjach.

- Postulatyści Amerykańscy w kilku przypadkach poprawiali wyniki wcześniej uzyskane przez innych.
- W kilku przypadkach dokonywali też korekt własnych dokonań.

Ekonomia opisu

- Dowody niezależności postulatów prowadzone są metodą znaną z *Grundlagen der Geometrie* Hilberta.
- Aby pokazać, że zbiór $\mathbb{A}$ postulatów jest niezależny, dowodzi się, że dla dowolnego $A \in \mathbb{A}$ istnieje struktura spełniająca wszystkie warunki z $\mathbb{A} - \{A\}$, lecz nie spełniająca A.

- W dowodach niezależności omawiani autorzy korzystają ze standardowych obiektów matematycznych: liczb całkowitych, rzeczywistych i zespolonych, sfer oraz innych obiektów geometrycznych.
- Niektóre z rozważanych przykładów są dość zabawne (np. *egg-shaped objects* w jednej z prac Huntingtona). Zdarzają się też trudne do wyjaśnienia przykłady.

Tworzenie pojęć metalogicznych

- *Niesprzeczność*. Rozumiana semantycznie przez Huntingtona (istnienie struktury). Veblen zgłaszał pewne zastrzeżenia (zob. cytaty powyżej).
- *Wynikanie*. Rozumiane na sposób semantyczny.
- *Niezależność*. Rozumiana na sposób przed chwilą omówiony.

- *Sufficiency*. Termin wprowadzony przez Huntingtona (1902): nieodróżnialność ze względu na izomorfizm.
- *Kategoryczność*. Veblen zastąpił powyższy termin terminem *categoricity* (1904).
- *Kategoryczność w mocy*. Nie jest brana pod uwagę.

Tworzenie pojęć metalogicznych

- *Zupełność*. Nie ma precyzyjnego pojęcia zupełności, ale omawiani autorzy wyrażają pewne *przeczucia metodologiczne* (zob. cytaty powyżej).
- *Definiowalność*. Definicje rozumiane jako skróty. Tarski skorygował pewne nietrafne stwierdzenia Veblena dotyczące definiowalności.
- *Aksjomat zupełności Hilberta*. Wspominany w pracach Huntingtona i Veblena.

- *Rozstrzygalność*. Praca Langforda (1926) dotycząca gęstych liniowych porządków.
- *Neutralność epistemologiczna*. Postulatyści Amerykańscy unikają deklaracji filozoficznych.

Wpływ i kontynuacja

- Skolem 1919: twierdzenie Löwenheima-Skolema.
- Fraenkel 1923: rozważania o zupełności.
- Carnap 1930: *Gabelbarkeitssatz*.
- Zermelo 1930: twierdzenia o izomorfizmie dziedzin normalnych.
- Twierdzenia o izomorfizmie w algebrze (Frobenius 1878, Hurwitz 1898/1923, Ostrowski 1916, Pontriagin 1932).

- Seminaria Tarskiego w Warszawie (1927–1929): wypracowanie wielu pojęć metalogicznych. Tarski, Lindenbaum 1935: m.in. warunek wystarczający dla implikacji *zupełność*$\rightarrow$*kategoryczność*. Tarski 1940: uwagi o kategoryczności i zupełności.
- Tarski: aksjomaty dla geometrii oraz teorii ciał rzeczywiście domkniętych.

Logiczny i matematyczny punkt widzenia

Przykłady aksjomatów ekstremalnych:

- Geometria: aksjomat zupełności (Hilbert), zastąpiony później przez aksjomat ciągłości.
- Arytmetyka: aksjomat indukcji (Peano).
- Algebra: aksjomat ciągłości (Cantor, Dedekind). Twierdzenia o izomorfizmie (Ostrowski, Frobenius, Hurwitz, Pontriagin).
- Teoria mnogości: aksjomaty ograniczenia (Fraenkel, Gödel, Suszko, Myhill). Aksjomaty maksymalności: aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych (Zermelo oraz współczesne propozycje).
- Klasyczne prace o aksjomatach ekstremalnych: Carnap, Bachmann 1936, Baer 1928, Baldus 1928, Bernays 1955, Fraenkel – Bar Hillel – Levy 1973. Prace współczesne: Hintikka (analiza poglądów Carnapa), Schiemer (aksjomat ograniczenia Fraenkla).

Charakterystyka modeli zamierzonych

Część I: Aspekty logiczne

- Tworzenie pojęć metalogicznych
- Konsekwencje twierdzeń limitacyjnych

Część II: Aspekty matematyczne

- Przyjęte oraz odrzucone aksjomaty ekstremalne
- Współczesne wyniki dotyczące kategoryczności i zupełności

Część III: Aspekty kognitywne

- Do czego potrzebujemy modeli zamierzonych?
- Intuicje profesjonalnych matematyków
- Rozumienie w matematyce

- Awodey, S., Reck, E.H. 2002. Completeness and Categoricity. Part I: Nineteenth-century Axiomatics to Twentieth-century Metalogic. *History and Philosophy of Logic* **23**, 1–30.
- Carnap, R., Bachmann, F. 1936. Über Extremalaxiome. *Erkenntnis* **6**, 166–188.
- Corcoran, J. 1981. From Categoricity to Completeness. *History and Philosophy of Logic* **2**, 113–119.
- Scanlan, M. 1991. Who were the American Postulate Theorists? *The Journal of Symbolic Logic* Volume **56**, Number **3**, 981–1002.
- Scanlan, M. 2003. American Postulate Theorists and Alfred Tarski. *History and Philosophy of Logic* **24**, 307–325.
- Tarski, A. 1940. On the Completeness and Categoricity of Deductive Systems. In: Mancosu, P. 2010. *The Adventure of Reason. Interplay between Philosophy of Mathematics and Mathematical Logic, 1900–1940*. Oxford University Press, Oxford, 485–492.