TABLICE ANALITYCZNE W KRP Z IDENTYCZNOŚCIĄ

Językoznawstwo i Nauki o Informacji I

1 Definicje

W języku KRP z identycznością, predykat identyczności jest traktowany w metodzie TA jako *stała logiczna*. W większości podręczników symbol $=$ oznacza zarówno *predykat* identyczności (w języku przedmiotowym), jak i *relację* identyczności (w metajęzyku). O predykacie identyczności $=$ zakłada się następujące aksjomaty:

1. $\forall x\; x = x$ (zwrotność); $\forall x \forall y\; (x = y \rightarrow y = x)$ (symetryczność); $\forall x \forall y \forall z\; ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$ (przechodniość)
2. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\; (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n))$
3. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\; (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \rightarrow P(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q(y_1, \ldots, y_n)$.

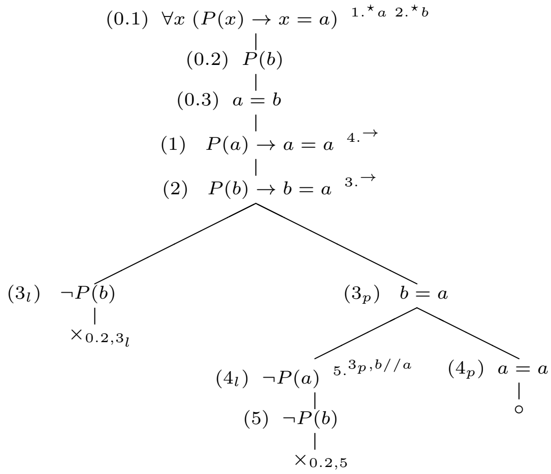
dla wszystkich n-argumentowych symboli funkcyjnych f oraz wszystkich predykatów n-argumentowych P, dla wszystkich n.
Reguła. Jeśli t_1 oraz t_2 są dowolnymi termami, α zawiera jakieś wystąpienia termu t_1, to gałąź tablicy zawierającą formuły α oraz $t_1 = t_2$ przedłużamy dodając formułę $\alpha(t_2//t_1)$:

$$\begin{array}{c} \alpha \\ | \\ t_1 = t_2 \\ | \\ \alpha(t_2//t_1) \end{array}$$

gdzie $\alpha(t_2//t_1)$ jest formułą powstającą z α poprzez zastąpienie pewnych wystąpień termu t_1 wystąpieniami termu t_2.
Umowa notacyjna. Zastosowanie tej reguły w kroku $^{n.}$ do formuły o numerze (m) z wykorzystaniem identyczności termów t_1 oraz t_2 wyrażonej w formule o numerze (k) zaznaczać będziemy umieszczonym z prawej strony formuły o numerze (m) komentarzem: $n.^{k,t_2//t_1}$.
Gałąź G tablicy analitycznej D jest *sprzeczna* (*zamknięta*), jeśli: α oraz $\neg\alpha$ występują w G, dla pewnego zdania α, *lub* $\neg(t = t)$ występuje w P, dla pewnego termu t. Tablica D jest *sprzeczna* (*zamknięta*), jeśli każda gałąź w D jest sprzeczna.
Zdanie α języka KRP z identycznością jest *tezą (tablicową)*, jeśli tablica $\neg\alpha$ jest sprzeczna. *Wynikanie tablicowe* oraz *tablicową niesprzeczność* definiujemy tak samo, jak poprzednio. Zachodzi twierdzenie o pełności dla metody TA w KRP z identycznością. Dowodzi się go korzystając z modeli *ilorazowych*.

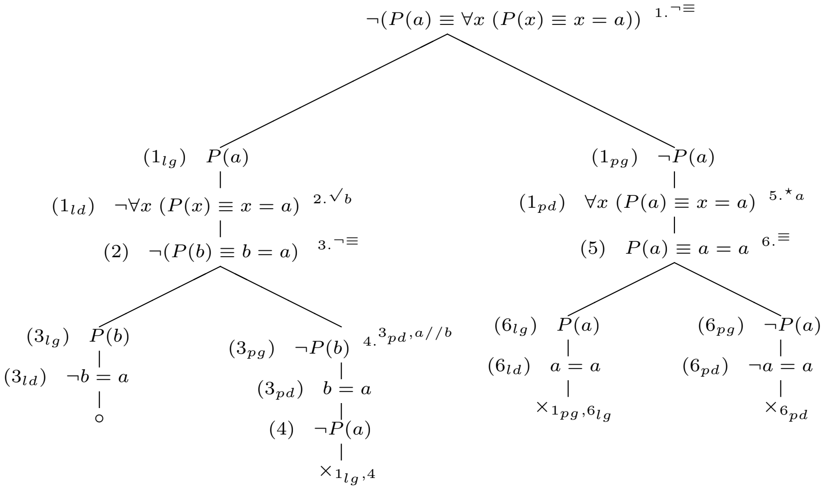
2 Przykłady

1. Pokażemy, że formuły $\forall x\; (P(x) \rightarrow x = a)$, $P(b)$, $a = b$ tworzą zbiór tablicowo niesprzeczny. Budujemy tablicę:



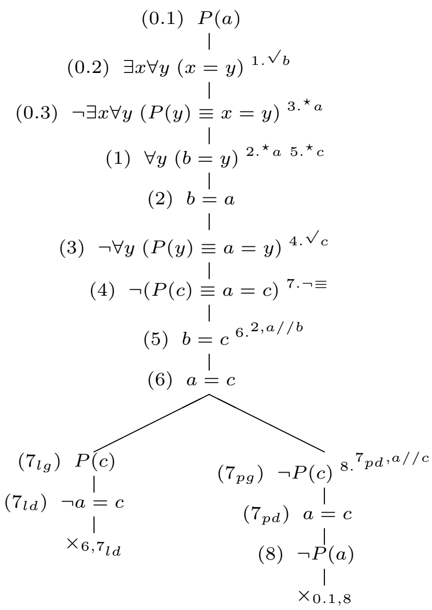
Tablica ma jedną gałąź otwartą, a zatem rozpatrywany zbiór formuł jest tablicowo niesprzeczny. Interpretacjami, w których wszystkie rozważane formuły są prawdziwe są te interpretacje, w których stałe indywiduowe a oraz b denotują ten sam obiekt, należący ponadto do denotacji predykatu P. Co więcej, denotacja predykatu P ma najwyżej jeden element. Reguła związana z predykatem identyczności została tu zastosowana w kroku 5 do formuły o numerze (4_l); wykorzystano mianowicie identyczność wyrażoną w formule atomowej o numerze (3_p) dokonując podstawienia stałej indywiduowej b za stałą indywiduową a.

2. Pokażemy, że formuła $P(a) \equiv \forall x\ (P(x) \equiv x = a)$ nie jest tezą tablicową. Budujemy tablicę analityczną dla negacji tej formuły:



Tablica ma jedną gałąź otwartą, a więc formuła $Pa \equiv \forall x\ (Px \equiv x = a)$ nie jest tezą tablicową. Reguła dotycząca predykatu identyczności zastosowana została w kroku $^{4.3_{pd},a//b}$. Zwracamy uwagę, że krok ten wykonujemy na otrzymanej w kroku $^{3.\neg\equiv}$ formule!

3. Pokażemy, że z przesłanek: $P(a)$ oraz $\exists x \forall y\ (x = y)$ wynika tablicowo wniosek $\exists x \forall y\ (P(y) \equiv x = y)$:



Tablica zamknięta. Reguła niezawodna. Zauważmy, że gdyby *nie* zastosować reguły dotyczącej identyczności, to otrzymalibyśmy drzewo *nieskończone*. Ćwiczenie dodatkowe: zastąp znak identyczności $=$ przez predykat dwuargumentowy Q i zbuduj początkowy fragment tablicy nieskończonej.

3 Zadanie domowe

Pisemnie (termin: 28 maja 2014, godz. 15:20). Pokaż, że zachodzi wynikanie tablicowe:

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x \exists y\ ((P(x) \wedge P(y)) \wedge (Q(x,y) \vee Q(y,x))) \\ \forall x\ (P(x) \rightarrow \neg Q(x,x))\end{array}}{\exists x \exists y\ (\neg x = y \wedge (P(x) \wedge P(y)))}$$

Zapisz poprawną polszczyzną wnioskowanie wedle tej reguły przy interpretacji: $P(x)$ — x *rzewnie wspomina swoje członkostwo w szeregach Polskiej Zjednoczonej Partii Robotniczej*, $Q(x,y)$ — x *jest bardziej pobożny od* y.