Logika algebraiczna 6

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

2021

Plan na dziś:

- Ogólne operacje konsekwencji: definicja i własności
- Krata operacji konsekwencji, systemy domknięć
- Zbiory niesprzeczne, maksymalne, aksjomatyzowalne, niezależne
- Reguły wnioskowania
- Reguły dopuszczalne, wyprowadzalne, strukturalne
- Twierdzenie Lindenbauma o maksymalizacji
- Kilka przykładów
- Niestandardowe operacje

Opieramy się głównie na monografii *Completeness Theory for Propositional Logics* Witolda Pogorzelskiego i Piotra Wojtylaka.
Następny wykład:

- Matryce logiczne
- Konsekwencje matrycowe
- Problematyka adekwatności

- Będziemy rozważali przede wszystkim języki zdaniowe, czyli zbiory formuł utworzonych ze zmiennych zdaniowych za pomocą funktorów zdaniotwórczych od argumentów zdaniowych. Najczęściej, choć nie zawsze, bierzemy pod uwagę przeliczalny zbiór zmiennych zdaniowych oraz skończony zbiór funktorów. Najczęściej, choć nie zawsze, są to funktory jedno- lub dwuargumentowe.
- Zakładamy, że słuchacze pamiętają definicję zbioru formuł języka zdaniowego o podanej liście funktorów. Jest to opis syntaktyczny. W logice algebraicznej podkreślamy natomiast, że języki zdaniowe są pewnymi algebrami: algebrami wolnymi, których wolnymi generatorami są zmienne zdaniowe.
- Składnia tych języków w pewnym stopniu przesądza o ich semantyce. Przede wszystkim chcemy zachować zgodność kategorii syntaktycznych z (odpowiednio rozumianymi) kategoriami semantycznymi i ontologicznymi. Chcemy też zachować zasady kompozycjonalności znaczeń.

- Akceptujemy podaną przez Witolda Pogorzelskiego ogólną charakterystykę logiki: *logika to usystematyzowany zestaw niezawodnych reguł wnioskowania*. Każdy z występujących w tym określeniu terminów wymaga eksplikacji, co po kolei uczynimy.
- Logika znajduje reprezentacje w postaci systemów logicznych, rozumianych jako trójki uporządkowane $(L, C, \mathbb{S})$, gdzie:
  1. L jest językiem formalnym rozważanego systemu;
  2. C jest pewną operacją, która każdemu zbiorowi formuł z L przyporządkowuje pewien zbiór formuł; C nazywamy operacją konsekwencji (rozważanego systemu);
  3. $\mathbb{S}$ jest semantyką rozważanego systemu; jest to pewna klasa struktur relacyjnych (algebr).
- Niech $\mathbf{S} = (S, F_1, \ldots, F_n)$ będzie algebrą ustalonego języka zdaniowego. W pewnych kontekstach będziemy używali innego rodzaju symboli na operacje tej algebry.

- Odwzorowanie $C : \wp(S) \to \wp(S)$ jest *operacją konsekwencji* (w języku **S**) wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $X, Y \subseteq S$:
  1. $X \subseteq C(X)$ (zwrotność)
  2. jeśli $X \subseteq Y$, to $C(X) \subseteq C(Y)$ (monotoniczność)
  3. $C(C(X)) \subseteq C(X)$ (idempotencja).
- Zamiast terminu *operacja konsekwencji* używamy także terminów: *operator konsekwencji* lub *operacja domknięcia* (*operator domknięcia*).
- Bezpośrednio z definicji operacji konsekwencji wynika, że każda taka operacja C spełnia też warunek: $C(C(X)) = C(X)$ dla wszystkich $X \subseteq S$.
- Pojęcie operacji konsekwencji pochodzi od Alfreda Tarskiego. W latach dwudziestych i trzydziestych XX wieku Tarski (we współpracy m.in. z Janem Łukasiewiczem i Adolfem Lindenbaumem) opracował podstawy metodologii nauk dedukcyjnych.

Oryginalna aksjomatyka Tarskiego z 1930 roku:

1. $|S| \leqslant \aleph_0$.
2. Jeśli $X \subseteq S$, to $X \subseteq C(X) \subseteq S$.
3. Jeśli $X \subseteq S$, to $C(C(X)) = C(X)$.
4. Jeśli $X \subseteq S$, to $C(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq X \wedge |Y| < \aleph_o\}$.
5. Istnieje zdanie $x \in S$ takie, że $C(\{x\}) = S$.

Dla rachunku zdaniowego ($c(x, y)$ nazwa implikacji, $n(x)$ nazwa negacji w metajęzyku):

- Jeśli $x, y \in S$, to $c(x, y) \in S$ i $n(x) \in S$.
- Jeśli $X \subseteq S$, $y, z \in S$, $c(y, z) \in C(X)$, to $z \in C(X \cup \{y\})$.
- Jeśli $X \subseteq S$, $y, z \in S$, $z \in C(X \cup \{y\})$, to $c(y, z) \in C(X)$.
- Jeśli $x \in S$, to $C(\{x, n(x)\}) = S$.
- Jeśli $x \in S$, to $C(\{x\}) \cap C(\{n(x)\}) = C(\emptyset)$.

- Odwołując się jedynie do pierwszych czterech oryginalnych aksjomatów Tarskiego udowodnić można np.:
  1. Jeśli $A \cup B \subseteq S$, to $C(A \cup B) = C(A \cup C(B)) = C(C(A) \cup C(B))$.
  2. Jeśli $\mathcal{K}$ jest niepustą rodziną podzbiorów zbioru S i dla wszystkich $X, Y \in \mathcal{K}$ mamy $X \subseteq Y$ lub $Y \subseteq X$, to $C(\bigcup\limits_{X \in K} X) = \bigcup\limits_{X \in K} C(X)$.
- Dla przykładu, udowodnimy 1). Na mocy zwrotności C mamy: $A \cup B \subseteq A \cup C(B) \subseteq C(A) \cup C(B) \subseteq S$.
- Na mocy monotoniczności C mamy: $C(A \cup B) \subseteq C(A \cup C(B)) \subseteq C(C(A) \cup C(B))$.
- Ponieważ $C(A) \subseteq C(A \cup B) \subseteq S$ i $C(B) \subseteq C(A \cup B) \subseteq S$, więc $C(A) \cup C(B) \subseteq C(A \cup B) \subseteq S$.
- Stąd $C(C(A) \cup C(B)) \subseteq C(C(A \cup B))$, a na mocy idempotencji C mamy $C(C(A \cup B)) = C(A \cup B)$.
- Tak więc, $C(A \cup B) = C(A \cup C(B)) = C(C(A) \cup C(B))$. $\square$

Zachęcamy słuchaczy do samodzielnej lektury tekstów źródłowych, których polskie tłumaczenia podaje się w: Alfred Tarski *Pisma logiczno-filozoficzne*. Tom 2 *Metalogika*. (Wybrał, przełożył, redakcji naukowej dokonał, przypisami opatrzył i wstępem poprzedził Jan Zygmunt), Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2001.

- Jan Łukasiewicz, Alfred Tarski: Badania nad rachunkiem zdań (3–30).
- Alfred Tarski: Podstawowe pojęcia metodologii nauk dedukcyjnych (31–92).

Porównanie współczesnego przedstawienia zagadnień logicznych (i matematycznych) w podręcznikach z wprowadzeniami tych zagadnień w odnośnych tekstach źródłowych pozwala lepiej zrozumieć dynamikę rozwoju logiki matematycznej i matematyki.

- Konsekwencja jałowa (idle): $Id(X) = X$ dla wszystkich $X \subseteq S$.
- Konsekwencja odrzucająca. Niech C będzie operacją konsekwencji w języku **S**. Określamy operację C_{-1}:
  $C_{-1}(X) = \{\alpha \in S : X \cap C(\{\alpha\}) \neq \emptyset\}$.
  Wtedy operacja C_{-1} też jest operacją konsekwencji, nazywaną konsekwencją odrzuceniową. Formuła α jest odrzucona na gruncie założeń X, gdy istnieje formuła $\beta \in X$ taka, że β wynika z α.
- Operacja $Sub^{\mathbf{A}}$ przyporządkowująca każdemu podzbiorowi X algebry **A** najmniejszą podalgebrę $Sub^{\mathbf{A}}(X)$ algebry **A** generowaną przez X spełnia warunki operacji konsekwencji.
- Operacja $Cg^{\mathbf{A}}$ przyporządkowująca każdemu podzbiorowi $X \subseteq A \times A$ najmniejszą kongruencję $Cg^{\mathbf{A}}(X)$ algebry **A** generowaną przez X spełnia warunki operacji konsekwencji.

- Na wykładzie *Logika I* omawiano aksjomatyczne ujęcie klasycznego rachunku zdań. Podano też definicję pojęcia dowodu formuły języka tego rachunku w oparciu o zbiór aksjomatów A i reguł wnioskowania R i pojęcia wyprowadzenia formuły ze zbioru założeń X.
- Operacja konsekwencji związana z takim systemem dowodowym to funkcja C, która każdemu zbiorowi X formuł języka tego rachunku przyporządkowuje zbiór $C(X)$ złożony ze wszystkich formuł, które wyprowadzić można z założeń X (przy użyciu aksjomatów ze zbioru A i reguł wnioskowania ze zbioru R).
- Zakładamy, że słuchacze poznali także metodę tablic analitycznych dla klasycznego rachunku zdań. Operacja konsekwencji C, wyznaczona przez tę metodę dowodową przyporządkowuje każdemu zbiorowi X formuł języka tego rachunku zbiór $C(X)$ wszystkich formuł, które posiadają tablicowe wyprowadzenie ze zbioru założeń X.

Niech $Fin(X)$ oznacza rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów zbioru X. Mówimy, że operacja domknięcia C jest:

- *finitystyczna*, gdy $C(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \in Fin(X)\}$ dla wszystkich $X \subseteq S$;
- *zwarta*, gdy dla każdego $Y \subseteq S$ istnieje $X \in Fin(Y)$ taki, że: jeśli $C(Y) = S$, to $C(X) = S$;
- *niesprzeczna*, gdy $C(\emptyset) \neq S$;
- *zupełna* (w sensie Posta), gdy $C(\{\alpha\}) = S$ dla każdego $\alpha \notin C(\{\emptyset\})$.
- *sprzeczna*, gdy $C(X) = S$ dla wszystkich $X \subseteq S$.

Finitystyczna. W większości zastosowań mamy do czynienia z finitystycznymi operacjami konsekwencji. Jeśli jednak korzystamy z niefinitarnych reguł wnioskowania (np. z ω-reguły), to oparta na nich operacja konsekwencji nie jest finitystyczna.
Zwarta. Finitystyczna operacja konsekwencji C jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy $C(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = S$ dla pewnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

- *Zupełna*. Klasyczny rachunek zdań, w wersji aksjomatycznej, z regułami odrywania i podstawiania, jest zupełny w sensie Posta. Niech bowiem φ będzie dowolną formułą języka tego rachunku, nie będącą tezą, czyli nie należącą do $C(\emptyset)$ (niewyprowadzalną z aksjomatów). Niech ψ będzie koniunkcyjną postacią normalną formuły φ. Wtedy ψ także nie jest tezą. Oznacza to, że przynajmiej jedna z alternatyw elementarnych ξ występujących w ψ nie zawiera żadnej pary komplementarnych literałów. Zastąpimy teraz w ξ każdą zmienną niezanegowaną przez p, a każdą zmienną zanegowaną przez $\neg p$. Wtedy ξ przekształcona zostanie w alternatywę $p \vee p \vee \ldots \vee p$, a ta alternatywa jest równoważna z p. Jeśli zatem dodamy do aksjomatów formułę φ, to tezą będzie ψ, a także ξ, i wreszcie również p. Gdy podstawimy $\neg p$ za p, otrzymamy sprzeczność.
- Klasyczny rachunek zdań (z regułą odrywania, bez reguły podstawiania) w wersji inwariantnej (czyli takiej, że aksjomatami są schematy formuł, a nie konkretne formuły) nie jest zupełny w sensie Posta.

- Ogół wszystkich operacji konsekwencji w S jest częściowo uporządkowany przez relację $\leqslant$ zdefiniowaną następująco: $C_1 \leqslant C_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_1(X) \subseteq C_2(X)$, dla wszystkich $X \subseteq S$.
- Następujące warunki są równoważne:
  1. $C_1 \leqslant C_2$
  2. $C_2 \circ C_1 = C_2$
  3. $C_1 \circ C_2 = C_2$.
- Dla dowolnej rodziny $\{C_t : t \in T\}$ operacji konsekwencji definiujemy operacje $\bigwedge\limits_{t \in T} C_t$ oraz $\bigvee\limits_{t \in T} C_t$:
  1. $(\bigwedge\limits_{t \in T} C_t)(X) = \bigcap\{C_t(X) : t \in T\}$
  2. $(\bigvee\limits_{t \in T} C_t)(X) = \bigcap\{C(X) : C_t \leqslant C$ dla wszystkich $t \in T\}$ dla wszystkich $X \subseteq S$.

  Wtedy zachodzą następujące fakty dotyczące uporządkowania ogółu konsekwencji w S przez relację $\leqslant$:

- $\bigwedge\limits_{t\in T} C_t$ oraz $\bigvee\limits_{t\in T} C_t$ są operacjami konsekwencji.
- $(\bigwedge\limits_{t\in T} C_t)(X) = \bigcap\{Y : X \subseteq Y = C_t(Y)$ dla wszystkich $t \in T\}$.
- Rodzina wszystkich operacji konsekwencji nad S jest kratą zupełną z porządkiem kratowym $\leqslant$ oraz kresami określonymi wzorami:
  $\inf\{C_t : t \in T\} = \bigwedge\limits_{t\in T} C_t$
  $\sup\{C_t : t \in T\} = \bigvee\limits_{t\in T} C_t$
- Elementem największym w tej kracie jest konsekwencja sprzeczna. Elementem najmniejszym jest operacja konsekwencji jałowej Id określona wzorem $Id(X) = X$ dla wszystkich $X \subseteq S$.
- Jeśli wszystkie operacje ze zbioru $\{C_t : t \in T\}$ są finitystyczne, to operacja $\bigvee\limits_{t\in T} C_t$ też jest finitystyczna.

- Mówimy, że zbiór formuł $X \subseteq S$ jest C-*domknięty*, gdy $X = C(X)$, czyli gdy X jest punktem stałym operacji C. Niech $Th(C) = \{X \subseteq S : X = C(X)\}$.
- Rodzina wszystkich zbiorów C-domkniętych jest jest zamknięta na iloczyny, tj.: $C(\bigcap\{C(X_t) : t \in T\}) = \bigcap\{C(X_t) : t \in T\}$.
- Rodzina ta nie jest jednak domknięta na sumy. Jeśli C jest finitystyczna, a $\{X_t : t \in T\}$ jest $\subseteq$-łańcuchem zbiorów (formuł), to: $C(\bigcup\{C(X_t) : t \in T\}) = \bigcup\{C(X_t) : t \in T\}$.
- Rodzina wszystkich zbiorów C-domkniętych jest kratą zupełną (z inkluzją jako porządkiem kratowym), z elementem najmniejszym $C(\emptyset)$ oraz elementem największym S.
- Kresy rodzin $\{X_t : t \in T\}$ zbiorów C-domkniętych wyznaczone są wzorami:
  $\inf\{X_t : t \in T\} = \bigcap\{X_t : t \in T\}$
  $\sup\{X_t : t \in T\} = C(\bigcup\{X_t : t \in T\})$

- Przypominamy, że rodzina zbiorów $\mathcal{X}$ jest *systemem domknięć*, jeśli iloczyn każdej podrodziny rodziny $\mathcal{X}$ jest elementem $\mathcal{X}$.
- Widzimy więc, że rodzina wszystkich zbiorów C-domkniętych jest systemem domknięć, dla dowolnej operacji konsekwencji C.
- Zachodzi także implikacja odwrotna: dowolny system domknięć wyznacza pewną operację konsekwencji.
- Jeśli mianowicie $\mathcal{X}$ jest systemem domknięć (rodziną podzbiorów zbioru S, zamkniętą na iloczyny), to definiujemy: $C(X) = \bigcap\{Y \in \mathcal{X} : X \subseteq Y\}$, dla dowolnego $X \subseteq S$.
- Można sprawdzić, że tak określona funkcja C jest operacją konsekwencji.
- Dla dowolnych operacji konsekwencji C_1 i C_2 w S następujące warunki są równoważne:
  1. $C_1 \leqslant C_2$
  2. $Th(C_2) \subseteq Th(C_1)$.

- Niech $\mathcal{X}$ będzie rodziną zbiorów formuł. Mówimy, że:
  1. Rodzina $\mathcal{X}$ jest skierowana w górę, gdy dla wszystkich $X, Y \in \mathcal{X}$ istnieje $Z \in \mathcal{X}$ taki, że $X \cup Y \subseteq Z$.
  2. Rodzina $\mathcal{X}$ jest induktywna, gdy $\bigcup \mathcal{Y} \in \mathcal{X}$ dla każdej skierowanej w górę podrodziny $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$.
- Niech $I \neq \emptyset$, X_i zbiór formuł dla każdego $i \in I$, ∇ (ultra)filtr w $\wp(I)$.
- Niech $\alpha \in \bigcap_{\nabla}\{X_i : i \in I\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{i \in I : \alpha \in X_i\} \in \nabla$.
- Zbiór $\bigcap_{\nabla}\{X_i : i \in I\}$ nazywamy (ultra)produktem zbiorów X_i względem (ultra)filtru ∇.
- Mówimy, że rodzina $\mathcal{X}$ zbiorów formuł jest zamknięta względem (ultra)produktów, gdy $\bigcap_{\nabla}\{X_i : i \in I\} \in \mathcal{X}$ dla każdej rodziny $\{X_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{X}$ i każdego (ultra)filtru ∇ w $\wp(I)$.

- **Lemat**. $\bigcap_{\nabla}\{X_i : i \in I\} = \bigcup\{\bigcap\{X_i : i \in F\} : F \in \nabla\}$, dla wszystkich filtrów ∇ w $\wp(I)$. □
- **Twierdzenie**. Następujące warunki są równoważne dla dowolnej operacji konsekwencji C:
  1. C jest finitystyczna.
  2. Rodzina $Th(C)$ jest induktywna.
  3. Rodzina $Th(C)$ jest zamknięta na ultraprodukty.
- **Fragment dowodu**. Dla przykładu, pokażemy implikacje 1) $\rightarrow$ 2) $\rightarrow$ 3). Cały dowód znaleźć można w monografii Ryszarda Wójcickiego *Lectures on Propositional Calculi*.
- 1) $\rightarrow$ 2). Załóżmy, że C jest finitystyczną operacją konsekwencji i weźmy dowolną niepustą skierowaną w górę rodzinę $\mathcal{X} \subseteq Th(C)$.
- Jeśli $\alpha \in C(\bigcup \mathcal{X})$, to istnieje skończony zbiór $X_0 \subseteq \bigcup \mathcal{X}$ taki, że $\alpha \in C(X_0)$.
- Oznacza to, że istnieje skończona podrodzina $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{X}$ taka, że $\alpha \in C(\bigcup \mathcal{X}_0)$.

- Ponieważ $\mathcal{X}$ jest skierowana w górę, więc $\bigcup \mathcal{X}_0 \subseteq Y$ dla pewnego $Y \in \mathcal{X}$. W konsekwencji, $\alpha \in C(Y) = Y \subseteq \bigcup \mathcal{X}$.
- Mamy zatem $C(\bigcup \mathcal{X}) \subseteq \bigcup \mathcal{X}$, a ponieważ odwrotna inkluzja jest oczywista, więc $\bigcup \mathcal{X} \in Th(C)$, czyli $Th(C)$ jest induktywna.
- 2) $\rightarrow$ 3). Załóżmy, że $Th(C)$ jest induktywna. Niech $\mathcal{X} = \{X_i : i \in I\} \subseteq Th(C)$ i niech ∇ będzie ultrafiltrem w $\wp(I)$.
- Zdefiniujmy $\mathcal{X}^* = \{\bigcap\{X_i : i \in F\} : F \in \nabla\}$. Wtedy $\bigcap \mathcal{X}^* \in Th(C)$.
- Jeśli $X = \bigcap\{X_i : i \in F\}$ a $Y = \bigcap\{X_i : i \in G\}$ dla pewnych $F, G \in \nabla$, to $X \cup Y \subseteq \{\bigcap\{X_i : i \in F \cap G\}$.
- Ponieważ $F \cap G \in \nabla$, więc rodzina $\mathcal{X}^*$ jest skierowana w górę. Na mocy powyższego lematu $\bigcap_\nabla \mathcal{X} = \bigcup \mathcal{X}^*$, a na mocy induktywności $Th(C)$ mamy $\bigcup \mathcal{X}^* \in Th(C)$. $\square$

- Powiemy, że zbiór $X \subseteq S$ jest:
  1. *C-niesprzeczny*, gdy $C(X) \neq S$;
  2. *C-maksymalny*, gdy X jest C-niesprzeczny oraz $C(X \cup \{\alpha\}) = S$ dla każdego $\alpha \notin C(X)$;
  3. *C-aksjomatyzowalny*, gdy istnieje skończony zbiór Y taki, że $C(X) = C(Y)$;
  4. *C-niezależny*, gdy $\alpha \notin C(X - \{\alpha\})$, dla każdego $\alpha \in X$.
- Oto niektóre własności tych pojęć:
  1. Jeśli X jest zbiorem C-maksymalnym, to $C(X)$ jest elementem $\subseteq$-maksymalnym w rodzinie wszystkich zbiorów C-domkniętych i C-niesprzecznych.
  2. Jeśli C jest finitystyczna, to żaden nieskończony zbiór C-niezależny nie jest C-aksjomatyzowalny.
  3. Jeśli X jest C-niezależny, to dla dowolnych $Y, Z \subseteq X$: $Y \subseteq Z$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(Y) \subseteq C(Z)$.

- Dla przykładu, udowodnimy, że jeśli istnieje zbiór, który nie jest C-aksjomatyzowalny, to to rodzina wszystkich C-aksjomatyzowalnych i C-domkniętych zbiorów jest nieskończona.
- **Dowód**. Załóżmy, że X nie jest C-aksjomatyzowalny.
- Przypuśćmy, że rodzina $\{C(Y) : Y \in Fin(X)\}$ jest skończona. Niech $\{C(Y) : Y \in Fin(X)\} = \{C(Y_1), \ldots C(Y_n)\}$ dla pewnych $Y_1, \ldots, Y_n \in Fin(X)$.
- Niech $Y_0 = \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} Y_i$.
- Wtedy $Y_0 \in Fin(X)$ i $Y \subseteq C(Y_0)$ dla wszystkich $Y \in Fin(X)$.
- A zatem $C(X) \subseteq C(Y_0)$, czyli X jest aksjomatyzowalny, wbrew założeniu.
- Oznacza to, że rodzina $\{C(Y) : Y \in Fin(X)\}$ jest nieskończona.
- W konsekwencji, także rodzina wszystkich C-aksjomatyzowalnych i C-domkniętych zbiorów jest nieskończona. $\square$

- Konsekwencją tych własności są m.in. następujące ustalenia dotyczące mocy pewnych rodzin zbiorów dla finitystycznej operacji konsekwencji C nad przeliczalnym językiem S, dla której istnieje nieskończony zbiór C-niezależny:
  1. Istnieje kontinuum zbiorów o postaci $C(X)$.
  2. Istnieje przeliczalnie wiele zbiorów o postaci $C(X)$, gdzie X jest zbiorem skończonym.
  3. Istnieje kontinuum zbiorów o postaci $C(X)$, gdzie $C(X)$ nie jest C-aksjomatyzowalny.
- Niech np. operacja konsekwencji C będzie określona w języku $S = \{a, b, c\}$ poprzez warunki:
  1. $C(\emptyset) = \emptyset$, $C(\{a\}) = \{a\}$, $C(\{b\}) = \{b\}$
  2. $C(\{c\}) = C(\{a, b\}) = C(\{a, c\}) = C(\{b, c\}) = C(S) = S$
- Zbiór $C(\emptyset)$ jest C-niesprzeczny, ale istnieją dwa różne maksymalne C-niesprzeczne jego nadzbiory, a mianowicie $C(\{a\})$ i $C(\{b\})$.
- Ciekawsze przykłady zbiorów C-niesprzecznych, C-maksymalnych, C-aksjomatyzowalnych i C-niezależnych, dla konkretnych operacji konsekwencji C podamy później.

- Przez *regułę wnioskowania* w **S** rozumiemy dowolną relację $r \subseteq \wp(S) \times S$.
- Poprzedniki relacji r nazywamy *zbiorami przesłanek* reguły r, a jej następniki *wnioskami* tej reguły.
- Ogół reguł wnioskowania w **S** oznaczamy przez $\mathbb{R}_S$.
- Reguły z pustym zbiorem przesłanek nazywamy regułami *aksjomatycznymi*.
- Jeśli r jest regułą wnioskowania oraz $(X, \alpha) \in r$, to parę (X, α) nazywamy *sekwentem* reguły r (to terminologia z monografii Pogorzelski, Wojtylak 2008; Wójcicki 1984 używa terminu *wnioskowanie* dla dowolnej pary (X, α)).
- Często używamy następującej notacji dla sekwentów danej reguły: $r : \frac{X}{\alpha}$.

- Najczęściej (choć nie zawsze) ograniczamy się do reguł wnioskowania o *skończonych* zbiorach przesłanek. Ponadto, zwykle wszystkie sekwenty danej reguły mają ustaloną budowę składniową; możemy wtedy regułę zapisywać w postaci schematycznej, jak np. w znanym przypadku reguły *modus ponens* (*reguły odrywania*), gdy rozważany język zawiera funktor $\rightarrow$: $\frac{\alpha \rightarrow \beta, \alpha}{\beta}$.
- Każdą parę (R, X), gdzie $R \subseteq \mathbb{R}_S$, a $X \subseteq S$ nazywamy *systemem logiki zdań* (albo: *logiką zdaniową*). Jeśli $\mathcal{L} = (R, X)$ jest logiką zdaniową, to mówimy, że:
  1. R jest zbiorem *reguł pierwotnych* $\mathcal{L}$
  2. X jest zbiorem *aksjomatów* $\mathcal{L}$.
- Zakładamy, że słuchacze znają przykłady reguł wnioskowania na gruncie zarówno logiki zdaniowej, jak i logiki pierwszego rzędu z kursów logiki oferowanych na pierwszych dwóch latach studiów kognitywistycznych.

- Oprócz rozważań dotyczących operacji konsekwencji pojmowanych całkiem ogólnie, w myśl podanej uprzednio definicji, interesujące i ważne jest badanie operacji konsekwencji wyznaczonej przez zespół reguł wnioskowania (oraz, ewentualnie, zestaw aksjomatów).
- W praktyce, gdy mówimy o wnioskach uzyskanych z jakiegoś zbioru przesłanek, zazwyczaj odwołujemy się do *metod*, za pomocą których wnioski te można uzyskać: zazwyczaj są to po prostu stosowne reguły wnioskowania.
- Ponadto, jak zobaczymy za chwilę, *każda* operacja konsekwencji może zostać przedstawiona jako operacja konsekwencji generowana poprzez pewien zestaw reguł wnioskowania (oraz, ewentualnie, zestaw aksjomatów).

- Niech $Cld(R, X)$ oznacza, że zbiór formuł X jest *zamknięty na wszystkie reguły ze zbioru* R: $Cld(R, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $r \in R$, wszystkich $P \subseteq S$ i wszystkich $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in r$ oraz $P \subseteq X$, to $\alpha \in X$.
- Dla dowolnych $X \subseteq S$ oraz $R \subseteq \mathbb{R}_S$ niech: $C(R, X) = \bigcap\{Y \subseteq S : X \subseteq Y \text{ oraz } Cld(R, Y)\}$.
- Wtedy $C(R, X)$ jest $\subseteq$-najmniejszym zbiorem zawierającym X i zamkniętym na wszystkie reguły z R. Zachodzą następujące fakty:
  1. Dla dowolnych: $X \subseteq S$ oraz $R \subseteq \mathbb{R}_S$: $C(R, X) = X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Cld(R, X)$.
  2. Załóżmy, że rozważamy jedynie reguły o skończonych zbiorach przesłanek. Wtedy: $\alpha \in C(R, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formalny *dowód* α na gruncie systemu o założeniach X i regułach wnioskowania R, czyli gdy istnieje skończony ciąg formuł $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ taki, że α jest identyczna z α_n oraz dla wszystkich $i \leqslant n$: albo $\alpha_i \in X$, albo $(P, \alpha_i) \in r$ dla pewnych $r \in R$ oraz $P \subseteq S$.

- Każda para o postaci (R, X), gdzie $R \subseteq \mathbb{R}_S$ pozwala określić pewną operację $C_{R,X}$ konsekwencji nad S: $C_{R,X}(Y) = C(R, X \cup Y)$. Dla $X = \emptyset$ będziemy zamiast $C_{R,X}$ pisali po prostu C_R.
- **Twierdzenie**. Dla każdej finitystycznej operacji konsekwencji C istnieją: zbiór $X \subseteq S$ oraz zbiór $R \subseteq \mathbb{R}_S$ takie, że $C = C_{R,X}$.
- **Dowód**. Dla $\alpha \in S$ i $P \in Fin(S) - \{\emptyset\}$ niech $(P, \alpha) \in r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C(P)$.
- Wtedy $C(Y) \subseteq C(\{r\}, C(\emptyset) \cup Y)$ dla wszystkich $Y \subseteq S$.
- Ponieważ C jest operacją konsekwencji, więc jeśli $(P, \alpha) \in r$ i $P \subseteq C(Y)$, to $\alpha \in C(Y)$.
- Oznacza to, że $C(Y)$ jest zamknięty na r, a zatem $C(\{r\}, C(\emptyset) \cup Y) \subseteq C(Y)$. □

Dowodzi się również, że dla każdej operacji konsekwencji C istnieje zbiór $R \subseteq \mathbb{R}_S$ taki, że $C = C_R$.

- Jeśli $C = C(R, X)$, to parę (R, X) nazywamy *bazą* dla C.
  1. Dana operacja konsekwencji może mieć wiele różnych baz.
  2. Każda para (R, X) *jednoznacznie* wyznacza operację konsekwencji $C(R, X)$.
- Operacje konsekwencji wyznaczone przez reguły możemy też definiować indukcyjnie. Niech R będzie dowolną rodziną reguł wnioskowania w **S**. Przez *operację konsekwencji w* **S** *wyznaczoną przez* $R \subseteq \mathbb{R}_S$ rozumiemy każdą funkcję $C : 2^S \to 2^S$, zdefiniowaną indukcyjnie następującymi warunkami dla dowolnego zbioru formuł X:
  1. $C^0(R, X) = X$
  2. $C^{k+1}(R, X) = C^k(R, X) \cup \{\alpha \in S : (\exists r \in R)(\exists P \subseteq C^k(R, X))\ (P, \alpha) \in r\}$
  3. $C(R, X) = \bigcup\{C^k(R, X) : k \in \mathbb{N}\}$.
- Wyrażenie $\alpha \in C(R, X)$ czytamy: α jest *wyprowadzalna* z X za pomocą reguł należących do R. Ta notacja jest zgodna z wprowadzoną poprzednio.

- Zbiór $\mathrm{Adm}(R, X)$ wszystkich reguł *dopuszczalnych* ze względu na $X \subseteq S$ i $R \subseteq \mathbb{R}_S$ definiujemy następująco: $r \in \mathrm{Adm}(R, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(R \cup \{r\}, X) \subseteq C(R, X)$.
- Zbiór $\mathrm{Der}(R, X)$ wszystkich reguł *wyprowadzalnych* ze względu na $X \subseteq S$ i $R \subseteq \mathbb{R}_S$ definiujemy następująco: $r \in \mathrm{Der}(R, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(R \cup \{r\}, X \cup Y) \subseteq C(R, X \cup Y)$, dla wszystkich $Y \subseteq S$.
- Bezpośrednio z tych definicji wynika, że:
  1. $r \in \mathrm{Adm}(R, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Cld(\{r\}, C(R, X))$.
  2. $r \in \mathrm{Der}(R, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Cld(\{r\}, C(R, X \cup Y))$, dla wszystkich $Y \subseteq S$.
- Ponadto $\mathrm{Der}(R, X) = \bigcap\{\mathrm{Adm}(R, X \cup Y) : Y \subseteq S\}$.
- $\mathrm{Der}(R, X) \subseteq \mathrm{Adm}(R, X)$, inkluzja odwrotna w ogólności nie zachodzi.

- Reguła r jest zatem dopuszczalna ze względu na X i R wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ oraz każdej $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in r$ i $P \subseteq C(R, X)$, to $\alpha \in C(R, X)$.
- Reguła r jest zatem wyprowadzalna ze względu na X i R wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq S$ oraz każdej $\alpha \in S$: jeśli $(P, \alpha) \in r$, to $\alpha \in C(R, X \cup P)$.
- Reguła r jest dopuszczalna w systemie logicznym (X, R), gdy dołączenie jej do reguł pierwotnych R tego systemu nie zmienia zbioru jego tez.
- Reguła r jest wyprowadzalna w systemie logicznym (X, R), gdy dołączenie do zbioru X aksjomatów systemu (X, R) przesłanek P z dowolnego jej sekwentu $(P, \alpha) \in r$ powoduje wyprowadzalność α w systemie (X, R).

- Niech r_* będzie regułą podstawiania, a r regułą o schemacie $\frac{\psi}{\psi}$ w języku S_2 klasycznego rachunku zdań.
- Załóżmy, że $(\varphi, \psi) \in r_*$ i $\varphi \in C(r, C(r_*, \{p \to p\}))$.
- Wtedy $\varphi \in C(r_*, \{p \to p\})$ oraz
  $\psi \in C(r_*, \{p \to p\}) \subseteq C(r, C(r_*, \{p \to p\}))$.
- Tak więc, $r_* \in \mathrm{Adm}(r, C(r_*, \{p \to p\}))$
- Mamy jednak $r_* \notin \mathrm{Der}(r, C(r_*, \{p \to p\}))$, ponieważ $(p, q \to s) \in r_*$, ale $q \to s \notin C(r, C(r_*, \{p \to p\}) \cup \{p\}) = C(r_*, \{p \to p\}) \cup \{p\}$.
- Pokazaliśmy zatem, że istnieją reguły dopuszczalne w danym systemie, które nie są wyprowadzalne w tym systemie.

- Dla dowolnych R oraz X:
  1. $R \subseteq \mathrm{Adm}(R, X)$
  2. $\mathrm{Adm}(\mathrm{Adm}(R, X)) = \mathrm{Adm}(R, X)$
- Operacja Adm nie jest jednak ani monotoniczna ani finitystyczna.
- Dla dowolnych R oraz X:
  1. $R \subseteq \mathrm{Der}(R, X)$
  2. Jeśli $R \subseteq R'$, to $\mathrm{Der}(R, X) \subseteq \mathrm{Der}(R', X)$
  3. Jeśli $X \subseteq Y$, to $\mathrm{Der}(R, X) \subseteq \mathrm{Der}(R, Y)$
  4. $\mathrm{Der}(\mathrm{Der}(R, X), X) = \mathrm{Der}(R, X)$
- Operacja Der nie jest jednak finitystyczna.

- Mówimy, że (R, X) jest *podsystemem* (R_1, X_1) (i piszemy wtedy $(R, X) \preccurlyeq (R_1, X_1)$) wtedy i tylko wtedy, gdy: $X \subseteq C(R_1, X_1)$ oraz $R \subseteq \mathrm{Der}(R_1, X_1)$.
- Jeśli $(R, X) \preccurlyeq (R_1, X_1)$, to:
  1. $\mathrm{Der}(R, X) \subseteq \mathrm{Der}(R_1, X_1)$
  2. $C(R, X) \subseteq C(R_1, X_1)$.
- Widzimy zatem, że formuły i reguły wyprowadzalne w podsystemie danego systemu, są również wyprowadzalne w tym systemie. Z faktu, że $(R, X) \preccurlyeq (R_1, X_1)$ nie wynika jednak ani inkluzja $\mathrm{Adm}(R, X) \subseteq \mathrm{Adm}(R_1, X_1)$, ani inkluzja do niej odwrotna.
- Jeśli X oraz X_1 są niepuste, to: $(R, X) \preccurlyeq (R_1, X_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Der}(R, X) \subseteq \mathrm{Der}(R_1, X_1)$.

- Relacja $\preccurlyeq$ jest zwrotna i przechodnia. Wyznacza zatem relację równoważności $\approx = \preccurlyeq \cap (\preccurlyeq)^{-1}$. Jeśli $(R, X) \approx (R_1, X_1)$, to:
  1. $\mathrm{Der}(R, X) = \mathrm{Der}(R_1, X_1)$;
  2. $C(R, X) = C(R_1, X_1)$;
  3. $\mathrm{Adm}(R, X) = \mathrm{Adm}(R_1, X_1)$.
- Jeśli X oraz X_1 są niepuste, to $(R, X) \approx (R_1, X_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Der}(R, X) = \mathrm{Der}(R_1, X_1)$.
- Zachodzą następujące fakty:
  1. $(R, X) \approx (\mathrm{Der}(R, X), X)$
  2. $(\mathrm{Der}(R, X), X) \approx (R, C(R, X))$
  3. $(R, C(R, X)) \approx (\mathrm{Der}(R, X), C(R, X))$
  4. $(\mathrm{Der}(R, X), C(R, X)) \preccurlyeq (\mathrm{Adm}(R, X), X)$
  5. $(\mathrm{Adm}(R, X), X) \approx (\mathrm{Adm}(R, X), C(R, X))$.

Będziemy używać symbolu $\prec$ dla $\preccurlyeq - (\preccurlyeq)^{-1}$. Mamy np.: $(R, X) \prec (\mathrm{Adm}(R, X), C(R, X))$.

- Zachodzą następujące fakty, dla dowolnych $X, X_1 \subseteq S$ oraz $R, R_1 \subseteq \mathbb{R}_S$:
  1. $(R, X) \preccurlyeq (R_1, X_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{R,X} \leqslant C_{R_1,X_1}$;
  2. $(R, X) \approx (R_1, X_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C_{R,X} = C_{R_1,X_1}$.
- Tak więc, porządek kratowy $\leqslant$ w kracie wszystkich operacji konsekwencji może być uważany za generowany poprzez porządek $\preccurlyeq$.
- Pojęcia: reguły wyprowadzalnej i reguły dopuszczalnej (sformułowane dla systemów o postaci (R, X)) mogą więc też zostać wyrażone z użyciem pojęcia operacji konsekwencji:
  1. $r \in \mathrm{DER}(C)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C(P)$, dla wszystkich $(P, \alpha) \in r$;
  2. $r \in \mathrm{ADM}(C)$ wtedy i tylko wtedy, gdy: jeśli $P \subseteq C(\emptyset)$, to $\alpha \in C(\emptyset)$, dla wszystkich $(P, \alpha) \in r$.
- Wśród wszystkich systemów, generujących daną operację konsekwencji rolę wyróżnioną pełni system $(\mathrm{DER}(C), C(\emptyset))$, nazywany *systemem domkniętym* logiki zdaniowej.

- Jak pamiętamy z elementarnego kursu logiki, *reguła podstawiania* (formuł za zmienne zdaniowe w KRZ) ma bardzo szczególny charakter: odwołujemy się w niej do pewnej (algebraicznej) operacji, inaczej niż w przypadku reguł w rodzaju np. *modus ponens*, gdzie odwołujemy się jedynie do własności syntaktycznych (kształtu przesłanek oraz wniosku).
- Niech At oznacza zbiór formuł atomowych (zmiennych zdaniowych) rozważanego języka. Każde *podstawienie*, czyli odwzorowanie $e : At \to S$ może w sposób jednoznaczny zostać rozszerzone do endomorfizmu $h^e : S \to S$.
- Wynik (jednoczesnego) podstawienia w formule α wyznaczonego przez wartości $e(p_i) = \gamma_i$, dla wszystkich zmiennych zdaniowych $p_1, \ldots, p_n$ występujących w α może być poprawnie oznaczany przez $\alpha[p_1/\gamma_1, \ldots, p_n/\gamma_n]$. Rozumie się przez to, że $h^e(\alpha) = \alpha[p_1/\gamma_1, \ldots, p_n/\gamma_n]$.

- Definiujemy *regułę podstawiania* r_* w S: $(\{\alpha\}, \beta) \in r_*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta = h^e(\alpha)$, dla pewnego podstawienia $e : At \to S$.
- Reguła r_* określona może także być poprzez schemat: $r_* : \quad \frac{\alpha}{h^e(\alpha)}$, dla wszystkich $\alpha \in S$ oraz wszystkich $e : At \to S$.
- Operacja konsekwencji wyznaczona przez regułę podstawiania jest oznaczana przez Sb. Tak więc, dla każdego $X \subseteq S$: $Sb(X) = C(\{r_*\}, X) = \{\alpha : \alpha \in h^e(X)$ dla pewnego $e : At \to S\}$.
- Mówimy, że reguła $r \in \mathbb{R}_S$ jest *strukturalna*, co zapisujemy $r \in$ Struct, wtedy i tylko wtedy, gdy: jeśli $(P, \alpha) \in r$, to $(h^e(P), h^e(\alpha)) \in r$, dla wszystkich $e : At \to S$.
- Zwykle rozważane reguły KRZ są strukturalne, oprócz reguły podstawiania.
- *Bardzo ogólnikowo można przedstawić strukturalność reguł jako stosowalność do wszelkich przesłanek o ustalonej strukturze wyznaczonej na ogół ich funktorem głównym.* Pogorzelski: *Elementarny słownik logiki formalnej*, 416.

- Mówimy, że system (R, X) (gdzie $R \subseteq \mathbb{R}_S$, $X \subseteq S$) jest *niezmienniczy* (co zapisujemy: $(R, X) \in$ Inv), jeśli: $R \subseteq$ Struct oraz $X = Sb(X)$.
- Jeśli $R \subseteq$ Struct, to $(R \cup \{r_*\}, X)$ nazywamy systemem *podstawieniowym*.
- Mówimy, że sekwent (P, α) jest *sekwentem bazowym* reguły r wtedy i tylko wtedy, gdy: $r = \{(h^e(P), h^e(\alpha)) :$ dla wszystkich podstawień $e\}$.
- Reguły, które posiadają sekwent bazowy, nazywane są regułami *standardowymi*. Każda reguła strukturalna r może zostać przedstawiona w postaci: $r = \bigcup\{r' : r' \subseteq r$ oraz r' jest standardowa$\}$.
- Każda reguła standardowa jest strukturalna (lecz nie na odwrót). Np. reguła r_X, dla każdego $X \subseteq S$: $(P, \alpha) \in r_X$ wtedy i tylko wtedy, gdy: jeśli $h^e(P) \subseteq X$, to $h^e(\alpha) \in X$, dla wszystkich podstawień e jest strukturalna, ale nie standardowa, bo np. $(\{p \vee q\}, p) \in r_{\{p\}}$, $(\{p \rightarrow q\}, p) \in r_{\{p\}}$, ale $(\{q\}, p) \notin r_{\{p\}}$.

- Jeśli $R \subseteq \mathrm{Struct}$ i $X \subseteq S$, to $h^e(C(R, X)) \subseteq C(R, h^e(X))$, dla każdego podstawienia $e : At \to S$.
- Dla dowolnych $R \subseteq \mathrm{Struct}$ i $X \subseteq S$:
  1. $r_* \in \mathrm{Adm}(R, Sb(X))$
  2. $r_* \notin \mathrm{Der}(R, Sb(X))$, o ile $\emptyset \neq C(R, Sb(X)) \neq S$.
- **Dowód 2)**. Zauważmy, że $(\{p\}, q) \in r_*$ dla wszystkich $p, q \in At$.
- Jeśli $e : At \to S$ jest podstawieniem takim, że $e(p) \in C(R, Sb(X))$ i $e(q) \notin C(R, Sb(X))$, to $h^e(q) \notin C(R, Sb(X) \cup \{h^e(p)\})$, a zatem $q \notin C(R, Sb(X) \cup \{p\})$.
- Tak więc, na mocy definicji reguł wyprowadzalnych, $r_* \notin \mathrm{Der}(R, Sb(X))$. □

Mówimy, że operacja konsekwencji C jest strukturalna wtedy i tylko wtedy, gdy $eC(X) \subseteq C(eX)$ dla wszystkich $X \subseteq S$ i podstawień $e : S \to S$.

- **Twierdzenie**. Operacja konsekwencji C jest strukturalna wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina $Th(C)$ jest zamknięta ze względu na przeciwobrazy podstawień, czyli $e^{-1}T \in Th(C)$ dla każdego podstawienia $e : S \to S$ i $T \in Th(C)$.
- **Dowód**. Załóżmy, że C jest strukturalna, czyli $eC(X) \subseteq C(eX)$ dla wszystkich $X \subseteq S$ i podstawień $e : S \to S$.
- Niech $T \in Th(C)$ i $e : S \to S$. Trzeba pokazać, że $C(e^{-1}T) = e^{-1}T$.
- Na mocy strukturalności C: $eC(e^{-1}T) \subseteq C(ee^{-1}T) = C(T) = T$.
- Podobnie, $C(e^{-1}T) \subseteq e^{-1}eC(e^{-1}T) \subseteq e^{-1}C(ee^{-1}T) \subseteq e^{-1}T$.
- Oznacza to, że $C(e^{-1}T) = e^{-1}T$, czyli $e^{-1}T \in Th(C)$.
- Pokazaliśmy zatem, że strukturalność C implikuje zamkniętość $Th(C)$ na przeciwobrazy podstawień.

- Pokażemy, że jeśli $e\psi \notin C(eX)$, to $\psi \notin C(X)$, dla dowolnych $X \subseteq S$, $\psi \in S$, $e : S \to S$.
- Załóżmy, że $e\psi \notin C(eX)$.
- Wtedy $\psi \notin e^{-1}C(eX) \supseteq e^{-1}eX \supseteq X$.
- Ponieważ $C(e^{-1}C(eX)) = e^{-1}C(eX)$, więc $\psi \notin X$. $\square$

Warunek strukturalności operacji C można równoważnie zapisać w postaci równości: $C(eC(X)) = C(eX)$.

- Zakładamy, że słuchacze zetknęli się już wcześniej (podczas kursu *Logika I* lub *Logika II*) z *Lematem Lindenbauma* dla klasycznego rachunku zdań, który głosi, że dla każdego niesprzecznego zbioru X zdań języka tego rachunku istnieje maksymalny niesprzeczny zbiór Y taki, że $X \subseteq Y$.
- W ogólności ów maksymalny zbiór niesprzeczny nie musi być wyznaczony jednoznacznie.
- Niech np. (rozważana już wcześniej) operacja konsekwencji C będzie określona w języku $S = \{a, b, c\}$ poprzez warunki:
  1. $C(\emptyset) = \emptyset$, $C(\{a\}) = \{a\}$, $C(\{b\}) = \{b\}$
  2. $C(\{c\}) = C(\{a, b\}) = C(\{a, c\}) = C(\{b, c\}) = C(S) = S$
- Zbiór $C(\emptyset)$ jest C-niesprzeczny, ale istnieją dwa różne maksymalne C-niesprzeczne jego nadzbiory, a mianowicie $C(\{a\})$ i $C(\{b\})$.

- **Twierdzenie** (Relatywne twierdzenie Lindenbauma o maksymalizacji). Jeśli system (R, A) jest zwarty i $C(R, A \cup X) \neq S$, to istnieje zbiór $Y \subseteq S$ taki, że:
  1. $C(R, A \cup X) \subseteq C(R, A \cup Y) \neq S$
  2. $C(R, A \cup Y) = Y$
  3. $C(R, A \cup Y \cup \{\alpha\}) = S$ dla każdego $\alpha \notin Y$.
- **Dowód**. Załóżmy, że $C(R, A \cup X) \neq S$. Ponieważ zbiór S jest przeliczalny, więc możemy jego elementy ustawić w ciąg nieskończony $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$
- Definiujemy nieskończony ciąg zbiorów X_0, X_1, X_2,...
- $X_0 = C(R, A \cup X)$
- Jeśli $C(R, A \cup X_k \cup \{\alpha_k\}) = S$, to niech $X_{k+1} = X_k$
- Jeśli $C(R, A \cup X_k \cup \{\alpha_k\}) \neq S$, to niech $X_{k+1} = C(R, A \cup X_k \cup \{\alpha_k\})$.
- Zauważmy, że $X_k \subseteq X_{k+1}$ oraz $X_k = C(R, A \cup X_k) \neq S$.

- Niech $Y = \bigcup\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$. Wtedy $X_0 \subseteq Y$.
- Załóżmy, że $C(R, A \cup Y) = S$. Wtedy istnieją $\beta_1, \ldots, \beta_n \in Y$ takie, że $C(R, A \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}) = S$ i $\beta_1, \ldots, \beta_n \in X_i$ dla pewnego i.
- Wtedy $X_i = C(R, A \cup X_i) = S$, w sprzeczności z definicją ciągu zbiorów X_i. Udowodniliśmy więc 1).
- Załóżmy, że $\alpha \notin Y$. Wtedy α jest jedną z formuł α_i, dla pewnego i. Skoro $\alpha \notin Y$, to $\alpha_i \notin X_j$ dla wszystkich j.
- Niech $\alpha_i \in C(R, A \cup Y) = C(R, A \cup \bigcup\{X_i : i \in \mathbb{N}\})$. Ponieważ $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ jest łańcuchem zbiorów, więc $\alpha_i \in \bigcup\{C(R, A \cup X_i) : i \in \mathbb{N}\}$.
- Z tego wynika, że $\alpha_i \in C(R, A \cup X_m)$ dla pewnego m, co daje sprzeczność. Udowodniliśmy zatem 2).
- Załóżmy, że $\alpha \notin Y$ i $C(R, A \cup Y \cup \{\alpha\}) \neq S$. Wtedy α jest jedną z α_i i mamy $X_{i+1} = C(R, A \cup Y \cup \{\alpha\}) \neq S$, a stąd $\alpha_i \in X_{i+1}$, co daje sprzeczność. Udowodniliśmy 3). $\square$

- Pewną miarą niezupełności danego systemu logiki jest liczba nadzbiorów zbioru tez tej logiki zamkniętych ze względu na operację konsekwencji tej logiki.
- Stopniem zupełności systemu logicznego (R, A) nazywamy moc zbioru $\{C(R, A \cup X) : X \subseteq S\}$.
- Jeśli C jest operacją konsekwencji związaną z systemem (R, A), to stopniem zupełności operacji C nazywamy moc zbioru $\{C(X) : X \subseteq S\}$, czyli moc zbioru $Th(C)$.
- Dla przykładu:
    1. Stopień zupełności klasycznego rachunku zdań ze zbiorem aksjomatów $Sb(A_2)$ i regułą odrywania jako jedyną regułą pierwotną jest równy kontinuum.
    2. Stopień zupełności klasycznego rachunku zdań ze zbiorem aksjomatów A_2 (zobacz niżej) i regułach podstawiania i odrywania jako regułach pierwotnych jest równy 2.

Więcej o problematyce zupełności systemów logicznych powiemy w następnych wykładach.

Językiem tej logiki jest standardowy język $\mathcal{S}_2 = (S_2, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg)$. Niech A_{int} będzie następującym zbiorem aksjomatów:

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s))$
4. $p \rightarrow (p \vee q)$
5. $q \rightarrow (p \vee q)$
6. $(p \rightarrow s) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow s))$
7. $(p \wedge q) \rightarrow p$
8. $(p \wedge q) \rightarrow q$
9. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r)))$
10. $p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)$
11. $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$.

- Niech $R_{0*} = \{r_0, r_*\}$, gdzie r_0 jest regułą *modus ponens*, a r_* regułą podstawiania w S_2. Wtedy (R_{0*}, A_{int}) jest systemem *intuicjonistycznej logiki zdaniowej*. W wersji niezmienniczej logika intuicjonistyczna jest systemem $(R_0, Sb(A_{int}))$, gdzie $R_0 = \{r_0\}$. Mamy: $C(R_{0*}, A_{int}) = C(R_0, Sb(A_{int}))$.
- Niech C^{int} będzie operacją konsekwencji generowaną przez system $(R_0, Sb(A_{int}))$. Mamy zatem dla każdego $X \subseteq S_2$: $C^{int}(X) = C(R_0, Sb(A_{int}) \cup X)$.
- W systemie tym zachodzi twierdzenie o dedukcji (charakteryzujące implikację): dla dowolnych $X \subseteq S_2$ oraz $\alpha, \beta \in S_2$: $\beta \in C^{int}(X \cup \{\alpha\})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \to \beta) \in C^{int}(X)$.
- Dla pozostałych spójników mamy (formuła $\alpha \equiv \beta$ jest skrótem dla formuły $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$):
    1. $C^{int}(X \cup \{\alpha \wedge \beta\}) = C^{int}(X \cup \{\alpha, \beta\})$
    2. $C^{int}(X \cup \{\alpha \vee \beta\}) = C^{int}(X \cup \{\alpha\}) \cap C^{int}(X \cup \{\beta\})$
    3. $(\alpha \equiv \beta) \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C^{int}(X \cup \{\alpha\}) = C^{int}(X \cup \{\beta\})$
    4. $\neg\alpha \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C^{int}(X \cup \{\alpha\}) = S_2$.

- W logice intuicjonistycznej wyprowadzalna jest reguła *dodawania koniunkcji*: $r_a : \quad \frac{\alpha,\beta}{\alpha\wedge\beta}$, dla wszystkich $\alpha, \beta \in S_2$.
- Zachodzą także następujące fakty:
  1. $\alpha \to \beta \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C^{int}(X \cup \{\beta\}) \subseteq C^{int}(X \cup \{\alpha\})$.
  2. $\alpha \vee \beta \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C^{int}(X \cup \{\alpha\}) \cap C^{int}(X \cup \{\beta\}) \subseteq C^{int}(X)$.
  3. $\alpha \wedge \beta \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C^{int}(X \cup \{\alpha\}) \cup C^{int}(X \cup \{\beta\}) \subseteq C^{int}(X)$.
  4. $\neg\alpha \in C^{int}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S_2 \subseteq C^{int}(X \cup \{\alpha\})$.
- C^{int} jest najmniejszą operacją konsekwencji nad S_2, która spełnia powyższe cztery warunki.

- Niech A_2 będzie zbiorem aksjomatów logiki intuicjonistycznej powiększonym o aksjomat $\neg\neg p \to p$. Przez *klasyczną logikę zdaniową* rozumiemy system $(R_0, Sb(A_2))$ (lub: (R_{0*}, A_2)). Definiujemy operację konsekwencji Cn_2: $Cn_2(X) = C(R_0, Sb(A_2) \cup X)$.
- Wprost z definicji zbiorów aksjomatów dla logiki intuicjonistycznej i logiki klasycznej (oraz z monotoniczności operacji konsekwencji) widać, że $C(R_{0*}, A_{int}) \subseteq C(R_{0*}, A_2)$. Zachodzą następujące fakty:
    1. $(\alpha \to \beta) \in Cn_2(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta \in Cn_2(X \cup \{\alpha\})$.
    2. $Cn_2(X \cup \{\alpha \wedge \beta\}) = Cn_2(X \cup \{\alpha, \beta\}$.
    3. $Cn_2(X \cup \{\alpha \vee \beta\}) = Cn_2(X \cup \{\alpha\} \cap Cn_2(X \cup \{\beta\}$.
    4. $\neg\alpha \in Cn_2(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Cn_2(X \cup \{\alpha\}) = S_2$.
    5. $\alpha \in Cn_2(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Cn_2(X \cup \{\neg\alpha\}) = S_2$.

- Ponieważ, jak można wykazać:
  1. operacja konsekwencji wyznaczona przez $(R_0, Sb(A_2))$ jest największą strukturalną oraz niesprzeczną operacją konsekwencji spełniającą powyższe pięć warunków;
  2. $(R_0, Sb(A_2))$ jest najmniejszym systemem spełniającym powyższe pięć warunków,
- więc warunki te jednoznacznie określają klasyczną logikę zdaniową, czyli następujące warunki są równoważne:
  1. Niesprzeczny niezmienniczy system (R, A) spełnia powyższe pięć warunków.
  2. $(R, A) \approx (R_0, Sb(A_2))$.

Niech A_{S5} będzie następującym systemem aksjomatów:

1. $(p \to (q \to s)) \to ((p \to q) \to (p \to s))$
2. $(s \to t) \to (q \to (s \to t))$
3. $(p \wedge q) \to p$
4. $(p \wedge q) \to p$
5. $(p \to q) \to ((p \to s) \to (p \to (q \wedge s)))$
6. $p \to (p \vee q)$
7. $q \to (p \vee q)$
8. $(p \to q) \to ((q \to s) \to ((p \vee q) \to s))$
9. $\neg(s \to t) \to ((s \to t) \to q)$
10. $(p \wedge \neg p) \to q$
11. $(p \to \neg p) \to \neg p$
12. $(p \wedge \neg(p \wedge q)) \to \neg q$
13. $(p \to \neg\neg p) \wedge (\neg\neg p \to p)$.

- *System modalny* $S5$ jest wyznaczony przez te aksjomaty oraz reguły:
  1. r_0 *modus ponens*
  2. r_* podstawiania
  3. r_a dodawania koniunkcji.
- Oznaczamy: $R_{0a*} = \{r_0, r_a, r_*\}$ oraz $R_{0a} = \{r_0, r_a\}$.
- Twierdzenie o dedukcji dla systemu $S5$ może zastać zapisane w następujących postaciach:
  1. Jeśli $X \subseteq \{\varphi \to \psi : \varphi, \psi \in S_2\}$, to dla wszystkich $\alpha, \beta \in S_2$: Jeśli $\beta \in C(R_{0a}, Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\alpha\})$, to $(\alpha \to \beta) \in C(R_{0a}, Sb(A_{S5}) \cup X)$.
  2. Dla każdego $X \subseteq S_2$ oraz $\alpha \in S_2$: $\alpha \in C(R_{0a}, Sb(A_{S5}) \cup X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $((\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \ldots \wedge \beta_k) \to \alpha) \in C(R_{0a}, Sb(A_{S5}))$ dla pewnych $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in X$.

- Zachodzą następujące fakty, charakteryzujące funktory logiki $S5$ poprzez operację konsekwencji tej logiki:
  1. $\neg\alpha \in C(R_{0a}, Sb(A_{S5}) \cup X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(R_{0a}, Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\alpha\}) = S_2$.
  2. $\alpha \in C(R_{0a}, Sb(A_{S5}) \cup X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C(R_{0a}, Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\neg\alpha\}) = S_2$.
  3. $C(R_{0a}, Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\alpha \wedge \beta\}) = C(R_{0a}, Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\alpha, \beta\})$.
  4. $C(R_{0a}, Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\alpha \vee \beta\}) = C(R_{0a}, Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\alpha\}) \cap C(R_{0a}, Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\beta\})$.
- Wprowadzamy oznaczenie: $\Box\alpha$ dla $(\alpha \to \alpha) \to \alpha$. Wtedy $(\Box\alpha \equiv (\beta \to \beta) \to \alpha) \in C(R_{0a*}, A_{S5})$, dla wszystkich $\alpha, \beta \in S_2$.

- Następujące formuły są tezami rozważanego systemu:
  1. $\Box p \rightarrow p$
  2. $(p \rightarrow q) \rightarrow \Box(p \rightarrow q)$
  3. $\neg\Box p \rightarrow \Box\neg\Box p$
  4. $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$
  5. $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$.
- Definiujemy zbiór formuł $\Box$-*domkniętych* $S_\Box$: $\alpha \in S_\Box$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \rightarrow \Box\alpha \in C(R_{0a*}, A_{S5})$. Wtedy: $\alpha \in S_\Box$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \equiv \Box\alpha \in C(R_{0a*}, A_{S5})$. Zachodzą także następujące fakty:
  1. $(\alpha \rightarrow \beta) \in S_\Box$.
  2. Jeśli $\alpha \in S_\Box$, to $\neg\alpha \in S_\Box$.
  3. Jeśli $\alpha, \beta \in S_\Box$, to $\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta \in S_\Box$.
  4. $C(R_{0a*}, A_{S5}) \subseteq S_\Box$.

- Zachodzą także następujące fakty:
  1. Dla wszystkich $X \subseteq S_{\Box}$ oraz $\alpha, \beta \in S_2$: $\beta \in C(R_{0a}, Sb(A_{S5}) \cup X \cup \{\alpha\})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\alpha \to \beta) \in C(R_{0a}, Sb(A_{S5}) \cup X)$.
  2. Ponieważ $\beta \notin S_{\Box}$ dla dowolnej formuły atomowej β, więc $S_2 - S_{\Box} \neq \emptyset$. Tak więc, reguła: $r_{\Box}: \quad \frac{\alpha}{\Box\alpha}$, gdzie $\alpha \in S_2$, nie jest wyprowadzalna w $(R_{0a}, Sb(A_{S5}))$. Jest ona jednak dopuszczalna w $(R_{0a}, Sb(A_{S5}))$, czyli: jeśli $\alpha \in C(R_{0a}, Sb(A_{S5}))$, to $\Box\alpha \in C(R_{0a}, Sb(A_{S5}))$.
  3. $\Box\alpha \in C(R_{0a*}, A_{S5} \cup \{\alpha\})$ dla wszystkich $\alpha \in S_2$, czyli reguła $r_{\Box}$ jest wyprowadzalna w (R_{0a*}, A_{S5}).
  4. Reguła $r_{\Box}$ nie jest wyprowadzalna w (R_{0*}, A_{S5}).

Powyższe przedstawienie systemu modalnego $S5$ pochodzi z monografii *Completeness Theory for Propositional Logics* Witolda Pogorzelskiego i Piotra Wojtylaka. Pod nazwą $S5$ występują także inne systemy modalne.

Systemem aksjomatów (nieskończenie) wielowartościowej logiki Łukasiewicza jest zbiór $Ł_\infty$ następujących formuł:

1. $(p \to q) \to ((q \to s) \to (p \to s))$
2. $p \to (q \to p)$
3. $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$
4. $(p \wedge q) \to p$
5. $(p \wedge q) \to q$
6. $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))$
7. $p \to (p \vee q)$
8. $q \to (p \vee q)$
9. $(p \to s) \to ((q \to s) \to ((p \vee q) \to s))$
10. $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$

Przez ∞-*wartościową logikę Łukasiewicza* rozumiemy system $(R_{0*}, Ł_\infty)$ lub, w wersji niezmienniczej: $(R_0, Sb(Ł_\infty))$.

- Wprowadźmy oznaczenia:
  1. $p \to^0 q$ dla q,
  2. $p \to^{k+1} q$ dla $p \to (p \to^k q)$.
- Skończenie wielowartościowe logiki Łukasiewicza to systemy $(R_{0*}, Ł_n)$, dla $n \geqslant 2$, gdzie zbiór $Ł_n$ zawiera powyższe aksjomaty oraz dwa aksjomaty następującej postaci (dla każdej $k \leqslant n$ takiej, że $k+2$ nie dzieli bez reszty $n-1$):
  - (11) $(p \to^n q) \to (p \to^{n-1} q)$
  - (12) $(p \equiv (p \to^k \neg p)) \to^{n-1} q$
- Zachodzi następujący fakt: $C_{R_{0*}}(Ł_\infty) = \bigcap\{C_{R_{0*}}(Ł_n) : n \geqslant 2\}$.

- Zachodzi następująca wersja twierdzenia o dedukcji:
  1. $\beta \in C(R_0, Sb(Ł_n) \cup X \cup \{\alpha\})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \rightarrow^{n-1} \beta \in C(R_0, Sb(Ł_n) \cup X)$
  2. $\beta \in C(R_0, Sb(Ł_\infty) \cup X \cup \{\alpha\})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje n taka, że $\alpha \rightarrow^{n} \beta \in C(R_0, Sb(Ł_\infty) \cup X)$.
- W konsekwencji, dla dowolnych $X \subseteq S_2$ oraz $\alpha \in S_2$:
  1. $C(R_0, Sb(Ł_n) \cup X \cup \{\alpha\}) = S_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \rightarrow^{n-2} \neg\alpha \in C(R_0, Sb(Ł_n) \cup X)$
  2. $C(R_0, Sb(Ł_\infty) \cup X \cup \{\alpha\}) = S_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje n taka, że $\alpha \rightarrow^{n} \neg\alpha \in C(R_0, Sb(Ł_\infty) \cup X)$.

Relacje konsekwencji w sensie Tarskiego.

- Relacja konsekwencji $\vdash \subseteq \wp(S) \times S$ jest określona przez warunki:
  1. $X \vdash \alpha$ dla każdego $\alpha \in X$.
  2. Jeśli $X \vdash \alpha$ i $X \subseteq Y$, to $Y \vdash \alpha$.
  3. Jeśli $X \vdash \beta$ dla wszystkich $\beta \in Y$ i $Y \vdash \alpha$, to $X \vdash \alpha$.
  4. Jeśli $X \vdash \alpha$, to istnieje $Y \in Fin(X)$ taki, że $Y \vdash \alpha$.
- Możemy przechodzić od operacji do relacji konsekwencji i na odwrót: $X \vdash \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C(X)$.
- $Th(C) = \{X \subseteq S : X = C(X)\}$, $Th(\vdash) = \{X \subseteq S : \alpha \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \vdash \alpha\}$ to rodzina domknięć, odpowiednio, operacji C i relacji $\vdash$.
- $\alpha \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in \bigcap\{Y \in Th(C) : X \subseteq Y\}$
- $X \vdash \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in \bigcap\{Y \in Th(\vdash) : X \subseteq Y\}$.

Relacje konsekwencji w sensie Scotta.

- Relacja $\Vdash \subseteq \wp(S) \times \wp(S)$ jest określona przez warunki:
  1. $X \Vdash X$, dla $X \neq \emptyset$.
  2. Jeśli $X \Vdash Y$, to $X \cup X' \Vdash Y \cup Y'$
  3. Jeśli $X \cup \{\alpha\} \Vdash Y$ i $X \Vdash Y \cup \{\alpha\}$, to $X \Vdash Y$ (dla dowolnych zbiorów $X, X', Y, Y' \in Fin(S)$)
  4. $X \Vdash Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X_0 \subseteq X$, $Y_0 \subseteq Y$ i $X_0 \Vdash Y_0$, dla dowolnych $X, Y \subseteq S$ i pewnych $X_0, Y_0 \in Fin(S)$.
- Konsekwencja $\Vdash$ jest *niesprzeczna*, gdy nie zachodzi $\emptyset \Vdash \emptyset$. Mamy wzajemną odpowiedniość:
  1. Jeśli $\Vdash$ spełnia powyższe warunki, to operacja $C : \wp(S) \to \wp(S)$ określona przez równoważność: $\alpha \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \Vdash \{\alpha\}$ jest operacją konsekwencji w sensie Tarskiego.
  2. Jeśli C jest operacją konsekwencji w sensie Tarskiego, to relacja $\Vdash \subseteq \wp(S) \times \wp(S)$ określona równoważnością: $X \Vdash Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\beta \in Y$ taka, że $\beta \in C(X)$ jest relacją konsekwencji w sensie Scotta.

- Współcześnie powstają liczne prace poświęcone operacjom, które nie spełniają któregoś z podstawowych warunków nakładanych na operacje konsekwencji (zwrotność, monotoniczność, idempotencja).
- Można oczywiście zastanawiać się, w jakich szczególnych przypadkach warto rozważać tego typu operacje. Przywołajmy jednak opinię Witolda Pogorzelskiego na ten temat:
- *Ogólnie jest jednak jasne, że z formalno-dowodowego punktu widzenia nie do przyjęcia jest odrzucenie w zwykłym formalizmie logicznym któregokolwiek z trzech aksjomatów operacji konsekwencji. Cała ta kwestia jest elementarnym, ale wyraźnym przykładem tego, że względy potocznej intuicji nie mogą być czynnikiem w sprawach formalnych i że można się posługiwać jakimś fragmentarycznym pojęciem konsekwencji jedynie w bardzo specjalnych celach, ale nie jako pojęciem ogólniejszym.* [*Elementarny słownik logiki formalnej*, 338]
- Pogorzelski podaje przykłady takich operacji (Pogorzelski 1992, 334–338):

- *Niezwrotna*. Określamy aksjomatycznie funkcję $C : \wp(S) \to \wp(S)$ następująco:
  1. $C(X \cup C(X)) \subseteq C(X) \subseteq S$
  2. Jeśli $X \subseteq Y$, to $C(X) \subseteq C(Y)$.
- Wtedy operacja C ma następujące własności:
  1. $C(X \cup C(X)) = C(X)$
  2. $C(X \cup C(Y)) \subseteq C(X \cup Y)$
  3. $C(C(X)) = C(X)$
  4. Jeśli $X \subseteq C(Y)$, to $C(X) \subseteq C(Y)$.
  5. Jeśli $X \subseteq C(Y)$, to $C(X \cup Y) = C(Y)$.

X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	S
$C(X)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	S

Zauważmy, że w tym przypadku rodzina zbiorów X takich, że $X = C(X)$ nie jest zamknięta na iloczyny: nie jest tak, że jeśli $X = C(X)$ oraz $Y = C(Y)$, to $C(X) \cap C(Y) \subseteq C(X \cap Y)$ (chociaż implikacja odwrotna oczywiście zachodzi).

- Przykładem tego typu operacji jest operacja zdefiniowana następująco dla dowolnych $\alpha \in S$ oraz $X \subseteq S$:
  1. $\alpha \in C_0^0(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\beta \in S$ taka, że $\beta \in X$ oraz $\beta \to \alpha \in X$
  2. $\alpha \in C_0^{k+1}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C_0^k(X)$ lub istnieje $\beta \in S$ taka, że $\beta \in X \cup C_0^k(X)$ oraz $\beta \to \alpha \in X \cup C_0^k(X)$
  3. $\alpha \in C_0(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C_0^n(X)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.
- *Odrzucenie warunku zwrotności może być tłumaczone chęcią zbliżenia pojęcia operacji konsekwencji (a więc i dowodu) do pewnego jej potocznego rozumienia: otóż potocznie uważa się, że aksjomaty dowodu nie mają, stąd, z grubsza biorąc, warunek stwierdzający zwrotność pojęcia konsekwencji należałoby odrzucić.* (Pogorzelski 1992, 334)

- *Niemonotoniczna*. Określamy aksjomatycznie funkcję $C : \wp(S) \to \wp(S)$ następująco:
  1. $X \subseteq C(X) \subseteq S$
  2. Jeśli $X \subseteq C(X)$, to $C(X \cup Y) \subseteq C(Y)$.
- Z tych warunków nie wynika własność monotoniczności, natomiast operacja C ma następujące własności:
  1. $C(X \cup C(X)) = C(X)$
  2. $C(C(X)) = C(X)$
  3. Jeśli $X \subseteq C(Y)$ oraz $Y \subseteq X$, to $C(X) \subseteq C(Y)$.
- Również w tym przypadku rodzina zbiorów X takich, że $X = C(X)$ nie jest domknięta na iloczyny.

X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	S
$C(X)$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	S

- Mówimy, że **M** jest modelem minimalnym zbioru zdań X (języka pierwszego rzędu), gdy:
  1. Każde zdanie z X jest prawdziwe w **M**.
  2. Dla każdej właściwej podstruktury $\mathbf{M}'$ struktury **M** istnieje zdanie $\alpha \in X$ takie, że α nie jest prawdziwe w $\mathbf{M}'$.
- Mówimy, że α wynika minimalnie z X (co zapisujemy $\alpha \in WM(X)$), gdy α jest prawdziwe we wszystkich modelach minimalnych zbioru X. Wtedy operacja WM spełnia warunki:
  1. $X \subseteq WM(X) \subseteq S$
  2. Jeśli $X \subseteq WM(X)$, to $WM(X \cup Y) \subseteq WM(Y)$.

WM nie spełnia jednak warunku monotoniczności. Modele minimalne pustego zbioru zdań są strukturami jednoelementowymi, a więc $\alpha \in WM(\emptyset)$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prawdziwe w każdej strukturze jednoelementowej. Niech zdanie β stwierdza istnienie dwóch elementów. Wtedy minimalnymi modelami zbioru $\{\beta\}$ są struktury dwuelementowe, a więc $\alpha \in WM(\{\beta\})$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prawdziwe w każdej strukturze dwuelementowej. Oczywiście $\emptyset \subseteq \{\beta\}$, ale zdanie $\forall x \forall y\ (x = y)$ należy do $WM(\emptyset)$, lecz nie należy do $WM(\{\beta\})$.

- *Odrzucenie warunku monotoniczności nie jest tak proste do intuicyjnego umotywowania. Trudno o argumenty logiczne świadczące na rzecz takiej operacji, ale można doszukiwać się pewnych racji w następującym hipotetycznym rozumowaniu: niech będzie dana funkcja „konsekwencji" F taka, która – poza innymi własnościami – ma tę, że działając na pewien element c pozwala uzyskać z niego pewną informację a różną od c. Wszakże jednak istnieje informacja b pełniejsza (bogatsza) od c czyniąca a fałszywą, tak więc to, czego dowiadujemy się przez F ze zbioru $\{b, c\}$ nie zawiera już a (jako fałszu w świetle b). Mielibyśmy więc, że $F(\{c\})$ nie zawiera się w $F(\{b, c\})$. Konstrukcja formalnego przykładu takiej operacji jest prosta, nietrywialne przykłady są rzecz jasna znacznie trudniejsze i subtelniejsze*. (Pogorzelski 1992, 335)
- Zauważmy na marginesie, że od pewnego czasu modne jest rozważanie wnioskowań niemonotonicznych.

- *Nieidempotentna*. Określamy aksjomatycznie funkcję $C : \wp(S) \to \wp(S)$ następująco:
  1. $X \subseteq C(X) \subseteq S$
  2. Jeśli $X \subseteq Y$, to $C(X) \subseteq C(Y)$.
- Wtedy operacja C ma następujące własności:
  1. $C(X \cup Y) \subseteq C(X \cup C(Y))$
  2. Jeśli $C(X) \subseteq Y$, to $C(C(X)) \subseteq C(Y)$
  3. $C(X \cap Y) \subseteq C(X) \cap C(Y)$
  4. Jeśli $X = C(X)$ oraz $Y = C(Y)$, to $C(X) \cap C(Y) \subseteq C(X \cap Y)$.
- Dla wyżej określonej aksjomatycznie operacji nie zachodzi $C(C(X)) \subseteq C(X)$. Także następujące zależności nie wynikają z przyjętych aksjomatów:
  1. Jeśli $X \subseteq C(Y)$, to $C(X) \subseteq C(Y)$
  2. Jeśli $X \subseteq C(Y)$, to $C(X \cup Y) \subseteq C(Y)$
  3. $C(X \cup C(X)) \subseteq C(X)$.

X	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	S
$C(X)$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	S

- Przykładem tego typu operacji jest operacja C_R^n, gdzie n jest ustalone, a R jest dowolnym zbiorem reguł skończonych, zdefiniowana następująco:
  1. $\alpha \in C_R^0(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in X$
  2. $\alpha \in C_R^{k+1}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in C_R^k(X)$ lub istnieje $r \in R$ oraz istnieje $\Pi \subseteq C_R^k(X)$ takie, że $(\Pi, \alpha) \in r$.
- *Odrzucenie warunku idempotencji znowu na swe poparcie odwołuje się do naturalnego wnioskowania, które przecież zawsze wykonywane jest w skończonej ilości kroków i nie zna czegoś takiego jak wysumowanie zbiorów wniosków po wszystkich liczbach naturalnych. Takie skończenie-krotne wnioskowanie istotnie nie spełnia warunku idempotencji.* (Pogorzelski 1992, 335)

- Czelakowski, J. 2001. *Protoalgebraic logics.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London.
- Łukasiewicz, J., Tarski, A. 1930. Untersuchungen über den Aussagenkalkül. *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie* Cl III, 23, 30–50.
- Łoś, J., Suszko, R. 1958. Remarks on sentential logics. *Indagationes Mathematicae* 20, 177–189.
- Pogorzelski, W.A. 1975. *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Pogorzelski, W.A. 1992. *Elementarny słownik logiki formalnej*. Dział Wydawnictw Filii Uniwersytetu Warszawskiego, Białystok.
- Pogorzelski, W.A., Wojtylak, P. 2008. *Completeness theory for propositional logics.* Birkhäuser, Basel Boston Berlin.
- Wójcicki, R. 1984. *Lectures on propositional calculi.* Ossolineum, Wrocław.