Wstęp do Matematyki (dod. 2)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Rachunek zbiorów

Wprowadzenie

Zakładamy, że w szkole mówiono ci o zbiorach oraz prostych operacjach na zbiorach.
Przypomnimy wybrane prawa rachunku zbiorów.

- Symbol U oznacza brane pod uwagę *uniwersum rozważań*.
- Podane prawa zachodzą dla wszelkich zbiorów; należy więc je rozumieć jako poprzedzone stosownymi kwantyfikatorami ogólnymi.
- (Metajezykowy) symbol $\Rightarrow$ zastępuje wyrażenie: „jeśli, to ”, a (metajęzykowy) symbol $\Leftrightarrow$ zastępuje wyrażenie: „wtedy i tylko wtedy, gdy”.

Używana notacja została przypomniana na pierwszych zajęciach ze Wstępu do Matematyki.

Wybrane prawa rachunku zbiorów

- $A \subseteq A$.
- Jeśli $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, to $A \subseteq C$.
- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$, $A - B \subseteq A$.
- $\emptyset \subseteq A \subseteq U$.
- Jeśli $A \subseteq \emptyset$, to $A = \emptyset$; jeśli $U \subseteq A$, to $A = U$.
- $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup U = U, A \cap U = A$.
- Istnieje tylko jeden zbiór, nie mający żadnych elementów.
- Następujące warunki są równoważne:
  - $A \subseteq B$
  - $A \cup B = B$
  - $A \cap B = A$
  - $A - B = \emptyset$
  - $(-A) \cup B = U$.

Wybrane prawa rachunku zbiorów

- $A \cup A = A \cap A = A$.
- $A \cap B = B \cap A$.
- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$.
- $-(A \cap B) = (-A) \cup (-B)$.
- $-(A \cup B) = (-A) \cap (-B)$.
- $-(-A) = A$.
- $A \cup (-A) = U$.
- $A \cap (-A) = \emptyset$.

Wybrane prawa rachunku zbiorów

- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.
- $A - (A - B) = A \cap B$.
- $A - B = A - (A \cap B)$.
- $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) - C$.
- $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.
- $A \cup B = A \cup (B - A)$.
- $(A \cap B) \cup [A \cap (-B)] = (A \cup B) \cap [A \cup (-B)] = A$.
- $[(-A) \cup B] \cap A = A \cap B$.
- $A \cap (B - A) = \emptyset$.
- $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.
- $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.
- $A - (B \cup C) = (A - B) - C$.

Wybrane prawa rachunku zbiorów

- $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ i $B \subseteq C$
- $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ i $A \subseteq C$
- $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq (-B) \cup C$
- $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap (-B) \subseteq C$
- $(A - B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$
- $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
- $A \subseteq B \Rightarrow (A - C) \subseteq (B - C)$
- $A \subseteq B \Rightarrow (C - B) \subseteq (C - A)$
- $A \subseteq B \Rightarrow -B \subseteq -A$
- $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$
- $A = -B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ i $A \cup B = U$.

Wybrane prawa rachunku zbiorów

- $A \div B = B \div A$.
- $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$.
- $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$.
- $A \div (A \div B) = B$.
- $A \cup B = (A \div B) \div (A \cap B)$.
- $A - B = A \div (A \cap B)$.
- $A \div \emptyset = A$.
- $A \div A = \emptyset$.
- $A \div U = -A$.
- $A \cup B = (A \div B) \cup (A \cap B)$.

Wybrane prawa rachunku zbiorów

- $(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \div (B_1 \cup \ldots \cup B_n) \subseteq (A_1 \div B_1) \cup \ldots \cup (A_n \div B_n)$.
- $(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \div (B_1 \cap \ldots \cap B_n) \subseteq (A_1 \div B_1) \cup \ldots \cup (A_n \div B_n)$.
- $A \div B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = A \div B$.
- $A \div B = C \Leftrightarrow B \div C = A \Leftrightarrow C \div A = B$.
- $\wp(A \cap B) = \wp(A) \cap \wp(B)$.
- $\wp(\bigcap\limits_{i \in I} A_i) = \bigcap\limits_{i \in I} \wp(A_i)$.
- $\wp(A \cup B) = \{A_1 \cup B_1 \ : \ A_1 \in \wp(A) \text{ i } B_1 \in \wp(B)\}$.
- $\wp(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \{\bigcup\limits_{i \in I} B_i \ : \ B_i \in \wp(A_i)\}$.

Wybrane prawa rachunku zbiorów

- $\bigcup\limits_{k\in K} \bigcup\limits_{t\in T} A_{kt} = \bigcup\limits_{t\in T} \bigcup\limits_{k\in K} A_{kt}$.
- $\bigcap\limits_{k\in K} \bigcap\limits_{t\in T} A_{kt} = \bigcap\limits_{t\in T} \bigcap\limits_{k\in K} A_{kt}$.
- $-(\bigcup\limits_{k\in K} A_k) = \bigcap\limits_{k\in K} (-A_k)$.
- $-(\bigcap\limits_{k\in K} A_k) = \bigcup\limits_{k\in K} (-A_k)$.
- $\bigcup\limits_{k\in K} A_k \cup \bigcup\limits_{k\in K} B_k = \bigcup\limits_{k\in K} (A_k \cup B_k)$.
- $\bigcup\limits_{k\in K} (B \cap A_k) = B \cap (\bigcup\limits_{k\in K} A_k)$.
- $\bigcap\limits_{k\in K} (B \cup A_k) = B \cup (\bigcap\limits_{k\in K} A_k)$.

Wybrane prawa rachunku zbiorów

- Dla dowolnych K, T, A_{kt}: $\bigcup\limits_{k\in K}\bigcap\limits_{t\in T} A_{kt} \subseteq \bigcap\limits_{t\in T}\bigcup\limits_{k\in K} A_{kt}$.
- Jeśli $A_t \subseteq B$ dla wszystkich $t \in T$, to $\bigcup\limits_{t\in T} A_t \subseteq B$.
- Jeśli $B \subseteq A_t$ dla wszystkich $t \in T$, to $B \subseteq \bigcap\limits_{t\in T} A_t$.
- Jeśli $A_t \subseteq B_t$ dla wszystkich $t \in T$, to $\bigcup\limits_{t\in T} A_t \subseteq \bigcup\limits_{t\in T} B_t$ i $\bigcap\limits_{t\in T} A_t \subseteq \bigcap\limits_{t\in T} B_t$.
- Jeżeli $\bigcap\limits_{n>0} A_n \cap \bigcap\limits_{n>0} B_n = \emptyset$, to $\bigcap\limits_{n>0} A_n \subseteq \bigcup\limits_{n>0} [A_n \cap (B_{n-1} - B_n)]$, gdzie $(\bigcup\limits_{n>0} A_n) \cup (\bigcup\limits_{n>0} B_n) \subseteq B_0$.
- Dla dowolnego układu zbiorów $A_0, \ldots, A_n, \ldots$ istnieje układ parami rozłącznych zbiorów $B_0, \ldots, B_n, \ldots$ taki, że $\bigcup\limits_{n} A_n = \bigcup\limits_{n} B_n$ i $B_n \subseteq A_n$.