REZOLUCJA I TABLICE ANALITYCZNE U LEWISA CARROLLA

JERZY POGONOWSKI

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

Metoda rezolucji była stosowana już w XIX wieku, choć pod inną nazwą i w odniesieniu jedynie do zdań kategorycznych określonej postaci. Wykorzystywał ją mianowicie CHARLES LUTWIDGE DODGSON, publikujący także pod pseudonimem LEWIS CARROLL. W jego podręczniku z 1896 roku metoda ta występuje pod nazwą *the method of underscoring*. W niniejszym tekście ograniczamy się do zaprezentowania działania tej metody w rozwiązywaniu *sorytów* (*łańcuszników*), a więc w poszukiwaniu konkluzji wynikającej z szeregu (co najmniej trzech) przesłanek. Pod uwagę brane są jedynie kategoryczne zdania ogólne, a więc zdania postaci *Wszystkie A są B* lub *Żadne A nie jest B*. Zakładamy, że czytelnicy znają diagramy Carrolla oraz warunki prawdziwości zdań kategorycznych.

Dodajmy jeszcze, że Lewis Carroll był prekursorem nie tylko jeśli chodzi o stosowanie reguły rezolucji. W cytowanym podręczniku znajdujemy również np. stosowanie (choć w ograniczonym zakresie) metody, która nazwana została później *metodą tablic analitycznych*. Podajemy przykłady stosowania tej metody przez Carrolla, wraz z komentarzami.

1. Opis metody rezolucji u Carrolla

1.1. Oczywistość z algebry zbiorów

Używamy standardowej notacji z rachunku zbiorów. A' jest dopełnieniem A (w ustalonym uniwersum U). Przypomnijmy, że $A \subseteq B$ jest równoważne z $A \cap B' = \emptyset$. Dla dowolnych zbiorów A, B oraz C zachodzi:

$$(\bigstar) \quad (A \cap C = \emptyset \wedge B \cap C' = \emptyset) \rightarrow A \cap B = \emptyset.$$

DOWÓD.

1.	$A \cap C = \emptyset$	założenie
2.	$B \cap C' = \emptyset$	założenie
3.	$(A \cap C) \cup C' = C'$	$\cup C'$ do obu stron
4.	$(B \cap C') \cup C = C$	$\cup C$ do obu stron
5.	$(A \cup C') \cap (C \cup C') = C'$	3, rachunek
6.	$(B \cup C) \cap (C \cup C') = C$	4, rachunek
7.	$A \cup C' = C'$	bo $C \cup C' = U$
8.	$B \cup C = C$	bo $C \cup C' = U$
9.	$(A \cup C') \cap (B \cup C) = C \cap C'$	7,8 $\cap$ stronami
10.	$(A \cup C') \cap (B \cup C) = \emptyset$	bo $C \cap C' = \emptyset$
11.	$(A \cap B) \cup (B \cap C') \cup (A \cap C) \cup (C \cap C') = \emptyset$	10, rachunek
12.	$A \cap B = \emptyset$	11, 1, 2, $C \cap C' = \emptyset$.
		Q.E.D.

(można też prościej, przy użyciu rachunku kwantyfikatorów, ale to nie jest sposób, który znany był Carrollowi!). ***Ćwiczenie:*** zaznacz na diagramie Carrolla sytuację wyrażaną przez przesłanki. Jaką informację o zależnościach między zbiorami A, B oraz C można wtedy uzyskać z tego diagramu?

Wzór ($\bigstar$) jest oczywisty: poprzednik implikacji ($\bigstar$) głosi, że $A \subseteq C'$ i $B \subseteq C$. Powyższy dowód podany był dla zabawy algebrą zbiorów.

Wzór ($\bigstar$) to po prostu wersja *reguły rezolucji* w języku algebry zbiorów. Carroll znał zatem tę regułę. Przyjmował jednak początkowo pewne dalsze reguły, natury czysto heurystycznej, które już poprawne nie były: w pewnych przypadkach sprawdzały się dobrze, ale w ogólności nie stanowiły poprawnego algorytmu.

Carroll twierdził mianowicie początkowo, że stosowanie reguły ($\bigstar$) wystarcza, aby znaleźć konkluzję dla ***wszystkich*** ciągów ogólnych zdań kategorycznych, zawierających różne nazwy ogólne. Jeśli w takim ciągu nazwa X występuje zarówno *pozytywnie* (niezaprzeczona), jak i *negatywnie* (z negacja przynazwową), to na mocy ($\bigstar$) może zostać *wyeliminowana*: nie wystąpi w konkluzji. Pozostałe nazwy w konkluzji wystąpią. W terminologii używanej przez Carrolla pierwsze z nich nazywane są *eliminands*, drugie *retinends*.

1.2. Reguły heurystyczne

Szukanie konkluzji dla ciągu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ogólnych zdań kategorycznych sprowadza się, pisze Carroll, do wykonania następujących czynności:

- (1) wyrażenia wszystkich zdań α_i w postaci zdań ogólno-przeczących, tj. zastąpienia zdań ogólno-twierdzących, jeśli takie występują, przez ogólno-przeczące z wykorzystaniem faktu, że:

$$A \subseteq B \text{ jest równoważne z } A \cap B' = \emptyset;$$

- (2) sporządzenia *wykazu* (w terminologii Carrolla: *register of attributes*), które nazwy występują w których przesłankach w formie:

- (a) pozytywnej
- (b) negatywnej;

- (3) ustawienia wszystkich przesłanek ciągu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ w takiej kolejności, aby dla pary następujących po sobie zdań można było zastosować regułę ($\bigstar$) eliminacji nazw;
- (4) stosowaniu reguły ($\bigstar$) tak długo, aż zostaną wyeliminowane wszystkie nazwy występujące w zdaniach ciągu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ zarówno pozytywnie, jak i negatywnie;
- (5) sformułowaniu konkluzji otrzymanej w wyniku tej procedury. Konkluzja będzie miała postać zdania ogólno-przeczącego. Można je przekształcić, jeśli wymagają tego względy stylistyczne, na zdanie ogólno-twierdzące, posługując się wspomnianą w punkcie (1) równoważnością.

Uwaga 1. Postać konkluzji jest jedynie ***sugerowana*** przez wykaz z punktu (2). Carroll w przypadku każdego łańcusznika ***sprawdza***, że istotnie jego konkluzja jest prawdziwa przy prawdziwych wszystkich przesłankach. Krok (3) nie jest oczywiście konieczny, ale jego wykonanie upraszcza dowody (co najmniej wizualnie). Carroll stosował ten krok w związku ze swoją metodą *underscoring*: podkreślania (pojedynczo i podwójnie) kolejno eliminowanych nazw.
Uwaga 2. Carroll przyjmował założenie (*existential import*), że podmiot zdania ogólno-twierdzącego jest nazwą niepustą.
Uwaga 3. Ogólniejsza od omówionej metody, a przede wszystkim, całkowicie ***poprawną***, nie odwołującą się do złudnych ustaleń natury heurystycznej, jest metoda *nie wprost* (której Carroll także używał, pod nazwą *the method of trees*), polegająca na przyjęciu *przypuszczenia*, że konkluzja jest fałszywa i badaniu, czy przypuszczenie to prowadzi do sprzeczności (zob. przykłady 4.1.–4.3. poniżej). To właśnie był prototyp metody znanej później pod nazwą metody ***tablic analitycznych***. Carroll używał jej pół wieku przed innymi logikami, którzy ją stosowali.

1.3. Algebraiczna notacja Carrolla

Carroll stosował następujące konwencje zapisu:

- X_0 dla $X = \emptyset$, X_1 dla $X \neq \emptyset$
- XY_0 dla $X \cap Y = \emptyset$, XY_1 dla $X \cap Y \neq \emptyset$
- znak † dla koniunkcji, znak ¶ dla zależności łączącej przesłanki z konkluzją i zachodzącej, gdy przesłanki uzasadniają konkluzję.

Wyrażenie postaci XY_0 to *nullity* (podobnie dla większej liczby zbiorów, których przekrój jest pusty).

Wyrażenie postaci XY_1 to *entity* (podobnie dla większej liczby zbiorów, których przekrój jest niepusty).

Indeks dolny $_1$ służył Carrollowi właściwie przede wszystkim do zaznaczania podmiotu w zdaniach kategorycznych, w których występowały podmioty złożone (koniunkcje nazw ogólnych).

W pierwszej części *Symbolic Logic* Carroll przyjmuje bez dyskusji założenie *existential import* dla zdań ogólno-twierdzących. Dopiero znacznie później zdaje się przyznawać, że założenie to nie jest niezbędne.

Oto niektóre z reguł sformułowanych przez Carrolla:

- Two Nullities, with Unlike Eliminands, yield a Nullity, in which both Retinends keep their Signs. A Retinend, asserted in the Premisses to exist, may be so asserted in the Conclusion.

$$XM_0 \dagger YM'_0 \P XY_0$$

- A Nullity and an Entity, with Like Eliminands, yield an Entity, in which the Nullity-Retinend changes its Sign.

$$XM_0 \dagger YM_1 \P X'Y_1$$

- Two Nullities, with Like Eliminands asserted to exist, yield an Entity, in which both Retinends change their Signs.

$$XM_0 \dagger YM_0 \dagger M_1 \P X'Y'_1$$

Zastosowania (★) notował Carroll w sposób następujący:

Z układu przesłanek $XM_0 \dagger YM'_0$ otrzymujemy, na mocy (★), wniosek XY_0.

Podkreślamy *eliminand* M w pierwszej przesłance raz, a (komplementarny do niego) *eliminand* M' w drugiej przesłance dwa razy. Te nazwy, które nie są podkreślone (czyli *retinends*) tworzą razem wniosek w postaci *nullity*: XY_0.

Mając dany łańcusznik, postępujemy w ten sposób dla każdej nazwy, która jest *eliminand*. Te nazwy, które pozostaną **nie podkreślone**, są *retinends* i dają wniosek w postaci *nullity*.

Krótko: pierwsze wystąpienie *eliminand* podkreślamy raz, drugie dwa razy.

Dla przykładu, jeśli dany jest układ przesłanek:

1	2	3	4	5	6	7
$K_1L'_0$	DH'_0	A_1C_0	$B_1E'_0$	$K'H_0$	$B'L_0$	$D'_1C'_0$

to omawiana metoda pozwala (po stosownym uporządkowaniu powyższych przesłanek) uzyskać z nich wniosek, poprzez kolejne użycia reguły (★):

1	5	2	6	4	7	3		
$\underline{K}\ \underline{L'}_0$	$\underline{\underline{K'}}\ \underline{H}_0$	$\underline{D}\ \underline{\underline{H'}}_0$	$\underline{B'}\ \underline{\underline{L}}_0$	$\underline{\underline{B}}\ E'_0$	$\underline{\underline{D'}}_1\ \underline{C'}_0$	$A_1\ \underline{\underline{C}}_0$	¶	$E'\ A_0 \dagger A_1$

Tak więc, wnioskiem z 1.–7. jest: $A \cap E' = \emptyset \wedge A \neq \emptyset$, czyli (existential import!) $A \subseteq E$.

2. Ilustracja działania metody

PRZYKŁAD 2.1. Rozważmy następujące siedem zdań kategorycznych, zapisanych w symbolice rachunku zbiorów:

1. $K \subseteq L$
2. $D \subseteq H$
3. $A \cap C = \emptyset$
4. $B \subseteq E$
5. $K' \cap H = \emptyset$
6. $B' \cap L = \emptyset$
7. $D' \subseteq C$.

Przedstawiamy wszystkie zdania w postaci zdań ogólno-przeczących:

1. $K \cap L' = \emptyset$
2. $D \cap H' = \emptyset$
3. $A \cap C = \emptyset$
4. $B \cap E' = \emptyset$
5. $K' \cap H = \emptyset$
6. $B' \cap L = \emptyset$
7. $D' \cap C' = \emptyset$.

Sporządzamy wykaz, o którym mówi punkt (2) metody:

Nazwa:	A	B	C	D	E	H	K	L
Pozytywnie:	3	4	3	2		5	1	6
Negatywnie:		6	7	7	4	2	5	1

Z tego wykazu widać, że nazwy: B, C, D, H, K oraz L zostaną wyeliminowane. Tabela *sugeruje* nadto, że konkluzja powinna mieć postać $A \cap E' = \emptyset$.

Ustawiamy powyższe zdania tak, aby do kolejno następujących po sobie stosować można było regułę ($\bigstar$):

1. $K \cap L' = \emptyset$

5. $K' \cap H = \emptyset$

2. $D \cap H' = \emptyset$

6. $B' \cap L = \emptyset$

4. $B \cap E' = \emptyset$

7. $D' \cap C' = \emptyset$

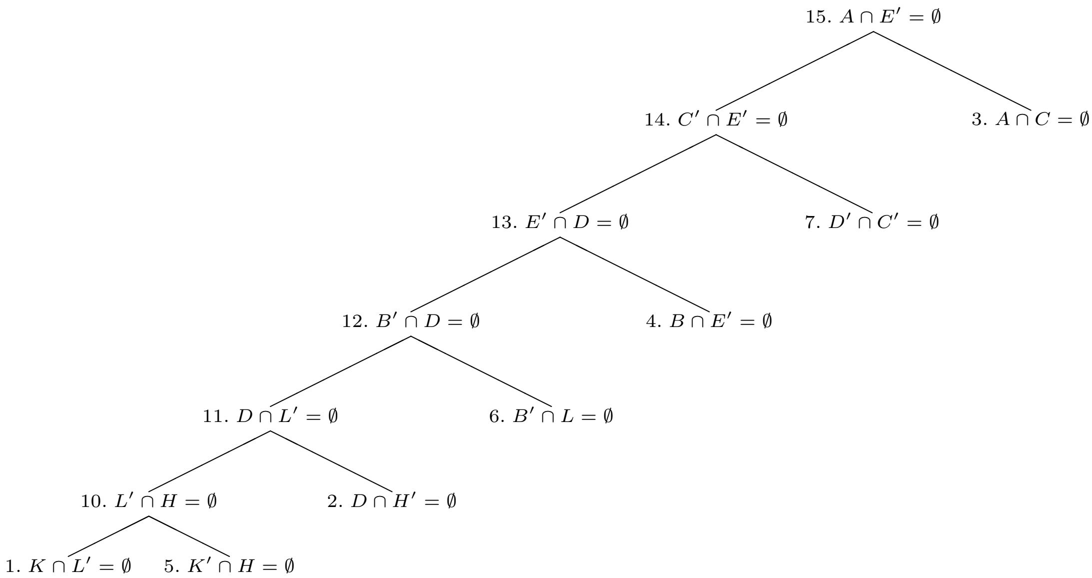
3. $A \cap C = \emptyset$.

Budujemy z tych przesłanek Dowód Rezolucyjny dla uzasadnienia konkluzji $A \cap E' = \emptyset$:

1.	$K \cap L' = \emptyset$	przesłanka
5.	$K' \cap H = \emptyset$	przesłanka
2.	$D \cap H' = \emptyset$	przesłanka
6.	$B' \cap L = \emptyset$	przesłanka
4.	$B \cap E' = \emptyset$	przesłanka
7.	$D' \cap C' = \emptyset$	przesłanka
3.	$A \cap C = \emptyset$	przesłanka
10.	$L' \cap H = \emptyset$	(★): 1 i 5, K
11.	$D \cap L' = \emptyset$	(★): 10 i 2, H
12.	$B' \cap D = \emptyset$	(★): 11 i 6, L
13.	$E' \cap D = \emptyset$	(★): 12 i 4, B
14.	$C' \cap E' = \emptyset$	(★): 13 i 7, D
15.	$A \cap E' = \emptyset$	(★): 14 i 3, C.

W kolumnie uzasadnień zaznaczamy względem którego literału dokonuje się rezolucji.

Przedstawmy jeszcze powyższy dowód w postaci drzewa:



Jak widać, liśćmi tego drzewa są przesłanki, jego korzeniem konkluzja, a każdy wierzchołek nie będący liściem powstaje w wyniku zastosowania (★) do swoich bezpośrednich potomków.

PRZYKŁAD 2.2. Rozważmy następujące pięć zdań kategorycznych (w drugiej kolumnie) wraz z ich sprowadzeniami do zdań ogólno-przeczących (w trzeciej kolumnie):

1.	$A \subseteq B$	$A \cap B' = \emptyset$
2.	$D \subseteq E$	$D \cap E' = \emptyset$
3.	$H \cap B = \emptyset$	$H \cap B = \emptyset$
4.	$C \cap E = \emptyset$	$C \cap E = \emptyset$
5.	$D' \subseteq A$	$D' \cap A' = \emptyset$

Uwaga 4. Zdanie $D' \cap A' = \emptyset$ jest równoważne zarówno z $D' \subseteq A$, jak i z $A' \subseteq D$, jak wiadomo z elementarnego rachunku zbiorów.

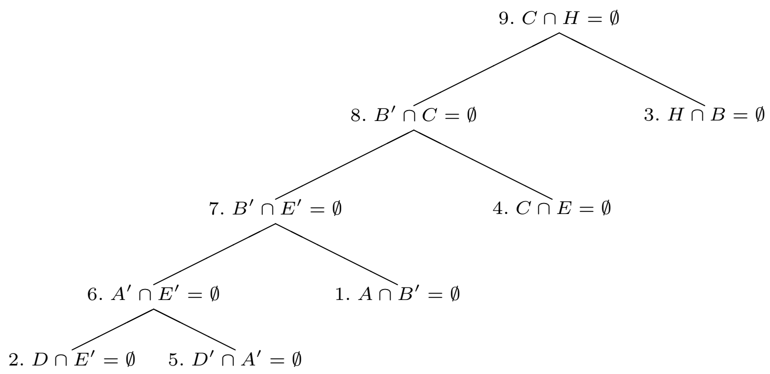
Budujemy tabelę występowania nazw w zdaniach 1.–5.:

Nazwa	Pozytywnie	Negatywnie
A	1	5
B	1	3
C	4	
D	2	5
E	4	2
H	3	

Tabela *sugeruje*, że nazwy: A, B, D oraz E zostaną wyeliminowane i że wniosek powinien mieć postać: $C \cap H = \emptyset$. Budujemy dowód rezolucyjny:

1.	$A \cap B' = \emptyset$	przesłanka
2.	$D \cap E' = \emptyset$	przesłanka
3.	$H \cap B = \emptyset$	przesłanka
4.	$C \cap E = \emptyset$	przesłanka
5.	$D' \cap A' = \emptyset$	przesłanka
6.	$A' \cap E' = \emptyset$	($\bigstar$): 2,5, D
7.	$B' \cap E' = \emptyset$	($\bigstar$): 1,6, A
8.	$B' \cap C = \emptyset$	($\bigstar$): 4,7, E
9.	$C \cap H = \emptyset$	($\bigstar$): 3,8, B

Zbudujmy jeszcze drzewo dowodowe:



Zauważmy, że:

- dowód rezolucyjny można rozpocząć od dowolnej przesłanki;
- drzewa dowodowe (w rozważanych tu przypadkach) zawsze mają postać drzewa binarnego o powyższej „schludnej” postaci: są wyznaczone przez ciąg par (C_i, A_i) ($0 \leqslant i \leqslant n$), gdzie C_0 oraz wszystkie A_i są założeniami (przesłankami) lub elementami pewnej klauzuli C_j dla $j < i$, a każda C_{i+1} ($i < n$) jest rezolwentą C_i oraz A_i. Tego typu rezolucja nazywana jest *rezolucją liniową*.

3. Łańcuszniki Carrolla

Pobawimy się teraz w analizę niektórych łańcuszników podanych przez Carrolla, z zastosowaniem omówionej w części **1** metody. Pozostajemy przy języku oryginału.

3.1. Przykłady łatwe

PRZYKŁAD 3.1. THE PIGS AND BALLONS PROBLEM.

- 1. All, who neither dance on tight ropes nor eat penny-buns, are old.
- 2. Pigs, that are liable to giddiness, are treated with respect.
- 3. A wise balloonist takes an umbrella with him.
- 4. No one ought to lunch in public, who looks ridiculous and eats penny-buns.
- 5. Young creatures, who go up in balloons, are liable to giddiness.
- 6. Fat creatures, who look ridiculous, may lunch in public, provided they do not dance on tight ropes.

- 7. No wise creatures dance on tight ropes, if liable to giddiness.
- 8. A pig looks ridiculous, carrying an umbrella.
- 9. All, who do not dance on tight ropes, and who are treated with respect are fat.

Znajdujemy nazwy ogólne występujące w tych przesłankach:

A	—	balloonists
B	—	carrying umbrellas
C	—	dancing on tight ropes
D	—	eating penny-buns
E	—	fat
F	—	liable to giddiness
G	—	looking ridiculous
H	—	may lunch in public
J	—	old
K	—	pigs
L	—	treated with respect
M	—	wise.

Przyjmiemy, za Carrollem, założenie, że *young* to tyle, co *not old*. Powyższe przesłanki mają następujące schematy (przekształcamy zdania ogólno-twierdzące na zdania ogólno-przeczące zgodnie z podaną wcześniej regułą):

$$
\begin{array}{ll}
1. & (C' \cap D') \cap J' = \emptyset \\
2. & (K \cap F) \cap L' = \emptyset \\
3. & (M \cap A) \cap B' = \emptyset \\
4. & (G \cap D) \cap H = \emptyset \\
5. & (J' \cap A) \cap F' = \emptyset \\
6. & (E \cap G \cap C) \cap H' = \emptyset \\
7. & (M \cap F) \cap C = \emptyset \\
8. & (K \cap B) \cap G' = \emptyset \\
9. & (C' \cap L) \cap E' = \emptyset.
\end{array}
$$

Zauważmy, że wszystkie te zdania mają złożone (z pomocą koniunkcji przynazwowej) podmioty. W dalszym ciągu będziemy opuszczać nawiasy w wieloczłonowych iloczynach.

Budujemy tabelę występowania nazw w poszczególnych przesłankach:

Nazwa	Pozytywnie	Negatywnie
A	3,5	
B	8	3
C	7	1,6,9
D	4	1
E	6	9
F	2,7	5
G	4,6	8
H	4	6
J		1,5
K	2,8	
L	9	2
M	3,7	

Tabela *sugeruje*, że wniosek będzie miał postać: $K \cap M \cap A \cap J' = \emptyset$.

Zanim podamy dowód rezolucyjny, że $K \cap M \cap A \cap J' = \emptyset$ można otrzymać z przesłanek 1.–9., wspomnimy jeszcze, że Carroll zalecał określoną kolejność stosowania (★). Jeżeli mianowicie jakaś nazwa występuje jeden raz w pewnej przesłance P, a dopełnienie tej nazwy występuje w kilku innych przesłankach $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$, to przesłanki $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ trzeba rozpatrzyć przed rozważeniem przesłanki P. Carroll pisał w takich przypadkach, że P jest *a premiss barred by* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$. W omawianym przykładzie mamy taką właśnie sytuację:

- przesłankę 5 trzeba rozważyć przed przesłankami 2 i 7;
- przesłankę 7 trzeba rozważyć przed przesłankami 1, 6 oraz 9;
- przesłankę 8 trzeba rozważyć przed przesłankami 4 i 6.

Zrezygnujemy tym razem z wykonania zaleceń punktu (3). Poszczególne kroki dowodowe będą numerowane podwójnie: raz numerem bieżącym, a nadto (pogrubionym) numerem wykorzystywanej przesłanki oraz wyniku zastosowania (★). Budujemy dowód rezolucyjny:

1.	**1.**	$C' \cap D' \cap J' = \emptyset$	przesłanka
2.	**4.**	$G \cap D \cap H = \emptyset$	przesłanka
3.	**10.**	$C' \cap J' \cap G \cap H = \emptyset$	(★): **1**,**4**, D
4.	**6.**	$E \cap G \cap C' \cap H' = \emptyset$	przesłanka
5.	**11.**	$C' \cap J' \cap G \cap E = \emptyset$	(★): **6**,**10**, H
6.	**8.**	$K \cap B \cap G' = \emptyset$	przesłanka
7.	**12.**	$C' \cap J' \cap E \cap K \cap B = \emptyset$	(★): **8**,**11**, G
8.	**9.**	$C' \cap L \cap E' = \emptyset$	przesłanka
9.	**13.**	$C' \cap J' \cap K \cap B \cap L = \emptyset$	(★): **9**,**12**, E
10.	**7.**	$M \cap F \cap C = \emptyset$	przesłanka
11.	**14.**	$J' \cap K \cap B \cap L \cap M \cap F = \emptyset$	(★): **7**,**13**, C
12.	**3.**	$M \cap A \cap B' = \emptyset$	przesłanka
13.	**15.**	$J' \cap K \cap L \cap M \cap F \cap A = \emptyset$	(★): **3**,**14**, B
14.	**2.**	$K \cap F \cap L' = \emptyset$	przesłanka
15.	**16.**	$J' \cap K \cap M \cap F \cap A = \emptyset$	(★): **2**,**15**, L
16.	**5.**	$J' \cap A \cap F' = \emptyset$	przesłanka
17.	**17.**	$J' \cap K \cap M \cap A = \emptyset$	(★): **5** ,**16**, F.

Zachęcamy do samodzielnego narysowania drzewa dowodowego.

Uwaga 5. Umowa notacyjna stosowana przez Carrolla pozwala na nieco krótsze przedstawienie powyższego dowodu (pomijamy wszędzie indeks $_0$):

1.	**1.**	$\underline{C'}\ \underline{D'}\ J'$	6.	**7.**	$M\ \underline{F}\ \underline{\underline{C}}$
2.	**4.**	$\underline{G}\ \underline{\underline{D}}\ \underline{H}$	7.	**3.**	$M\ A\ \underline{\underline{B'}}$
3.	**6.**	$\underline{E}\ \underline{G}\ \underline{C'}\ \underline{\underline{H'}}$	8.	**2.**	$K\ \underline{F}\ \underline{\underline{L'}}$
4.	**8.**	$K\ \underline{B}\ \underline{\underline{G'}}$	9.	**5.**	$J'\ A\ \underline{\underline{F'}}$
5.	**9.**	$\underline{C'}\ \underline{L}\ \underline{\underline{E'}}$	10.	$\therefore$	$K\ M\ A\ J'$

Istnieją też inne jeszcze konwencje notacyjne, pozwalające upraszczać tego typu dowody (zob. np. Crisler 1999).

Tak więc, wnioskiem z przesłanek 1.–9. jest $K \cap M \cap A \cap J' = \emptyset$, co można odczytać np. jako: ***No wise young pigs go up in balloons***.

PRZYKŁAD 3.2. Rozważmy następujące zdania kategoryczne:

- 1. The only animals in this house are cats.
- 2. Every animal is suitable for a pet, that loves to gaze at the moon.
- 3. When I detest an animal, I avoid it.
- 4. No animals are carnivorous, unless they prowl at night.
- 5. No cat fails to kill mice.
- 6. No animals ever take to me, except what are in this house.
- 7. Kangaroos are not suitable for pets.

- 8. None but carnivora kill mice.
- 9. I detest animals that do not take to me.
- 10. Animals, that prowl at night, always love to gaze at the moon.

Znajdujemy nazwy występujące w tych zdaniach:

A	—	avoided by me
B	—	carnivora
C	—	cats
D	—	detested by me
E	—	in this house
H	—	kangaroos
K	—	killing mice
L	—	loving to gaze at the moon
M	—	prowling at night
N	—	suitable for pets
R	—	taking to me.

Znajdujemy schematy przesłanek:

1. $E \cap C' = \emptyset$
2. $L \cap N' = \emptyset$
3. $D \cap A' = \emptyset$
4. $M' \cap B = \emptyset$
5. $C \cap K' = \emptyset$
6. $E' \cap R = \emptyset$
7. $H \cap N = \emptyset$
8. $B' \cap K = \emptyset$
9. $R' \cap D' = \emptyset$
10. $M \cap L' = \emptyset$.

Budujemy tabelę występowania nazw w przesłankach:

Nazwa	Pozytywnie	Negatywnie
A		3
B	4	8
C	5	1,6
D	3	9
E	1	6
H	7	
K	8	5
L	2	10
M	10	4
N	7	2
R	6	9

Tabela *sugeruje*, że wniosek będzie miał postać: $A' \cap H = \emptyset$.

Budujemy dowód rezolucyjny:

1.	$E \cap C' = \emptyset$	przesłanka
2.	$L \cap N' = \emptyset$	przesłanka
3.	$D \cap A' = \emptyset$	przesłanka
4.	$M' \cap B = \emptyset$	przesłanka
5.	$C \cap K' = \emptyset$	przesłanka
6.	$E' \cap R = \emptyset$	przesłanka
7.	$H \cap N = \emptyset$	przesłanka
8.	$B' \cap K = \emptyset$	przesłanka
9.	$R' \cap D' = \emptyset$	przesłanka
10.	$M \cap L' = \emptyset$	przesłanka
11.	$E \cap K' = \emptyset$	($\bigstar$): 1,5, C
12.	$K' \cap R = \emptyset$	($\bigstar$): 6,11, E
13.	$R \cap B' = \emptyset$	($\bigstar$): 8,12, K
14.	$R \cap M' = \emptyset$	($\bigstar$): 4,13, B
15.	$M' \cap D' = \emptyset$	($\bigstar$): 9,14, R
16.	$M' \cap A' = \emptyset$	($\bigstar$): 3,15, D
17.	$A' \cap L' = \emptyset$	($\bigstar$): 10,16, M
18.	$A' \cap N' = \emptyset$	($\bigstar$): 2,17, L
19.	$A' \cap H = \emptyset$	($\bigstar$): 7,18, N.

Wniosek z przesłanek 1.–10. można odczytać np.: ***I always avoid a kangaroo***. Zachęcamy do samodzielnego narysowania drzewa dowodowego.

PRZYKŁAD 3.3.

- 1. No shark ever doubts that it is well fitted out.
- 2. A fish, that cannot dance a minuet, is contemptible.
- 3. No fish is quite certain that it is well fitted out, unless it has three rows of teeth.
- 4. All fishes, except sharks, are kind to children.
- 5. No heavy fish can dance a minuet.
- 6. A fish with three rows of teeth is not to be despised.

Znajdujemy nazwy występujące w tych zdaniach:

A	—	able to dance a minuet
B	—	certain that he is well fitted out
C	—	contemptible
D	—	having three rows of teeth
E	—	heavy
H	—	kind to children
K	—	sharks.

Znajdujemy schematy przesłanek:

1. $K \cap B' = \emptyset$
2. $A' \cap C' = \emptyset$
3. $D' \cap B = \emptyset$
4. $K' \cap H' = \emptyset$
5. $E \cap A = \emptyset$
6. $D \cap C = \emptyset$.

Budujemy tabelę występowania nazw w przesłankach:

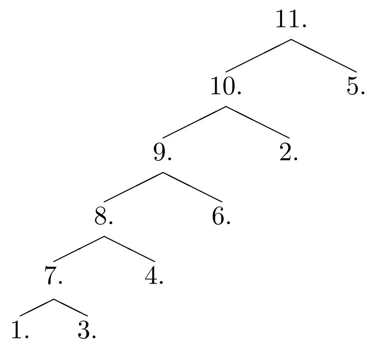
Nazwa	Pozytywnie	Negatywnie
A	5	2
B	3	1
C	6	2
D	6	3
E	5	
H		4
K	1	4

Tabela *sugeruje*, że wniosek będzie miał postać: $H' \cap E = \emptyset$.

Budujemy dowód rezolucyjny:

1.	$K \cap B' = \emptyset$	przesłanka
2.	$A' \cap C' = \emptyset$	przesłanka
3.	$D' \cap B = \emptyset$	przesłanka
4.	$K' \cap H' = \emptyset$	przesłanka
5.	$E \cap A = \emptyset$	przesłanka
6.	$D \cap C = \emptyset$	przesłanka
7.	$K \cap D' = \emptyset$	(★): 1,3, D
8.	$D' \cap H' = \emptyset$	(★): 4,7, K
9.	$H' \cap C = \emptyset$	(★): 6,8, D
10.	$H' \cap A' = \emptyset$	(★): 2,9, C
11.	$H' \cap E = \emptyset$	(★): 5,10, A.

Wniosek z przesłanek 1.–6. można odczytać np.: ***No heavy fish is unkind to children***. Drzewo dowodowe przedstawimy używając tylko numerów poszczególnych kroków:



PRZYKŁAD 3.4.

- 1. Animals, that do not kick, are always unexcitable.
- 2. Donkeys have no horns.
- 3. A buffalo can always toss one over a gate.
- 4. No animals that kick are easy to swallow.
- 5. No hornless animal can toss one over a gate.
- 6. All animals are excitable, except buffaloes.

Znajdujemy nazwy występujące w tych zdaniach:

A	—	able to toss one over the gate
B	—	buffaloes
C	—	donkeys
D	—	easy to swallow
E	—	excitable
H	—	horned
K	—	kicking.

Znajdujemy schematy przesłanek:

1. $K' \cap E = \emptyset$
2. $C \cap H = \emptyset$
3. $B \cap A' = \emptyset$
4. $K \cap D = \emptyset$
5. $H' \cap A = \emptyset$
6. $B' \cap E' = \emptyset$.

Budujemy tabelę występowania nazw w przesłankach:

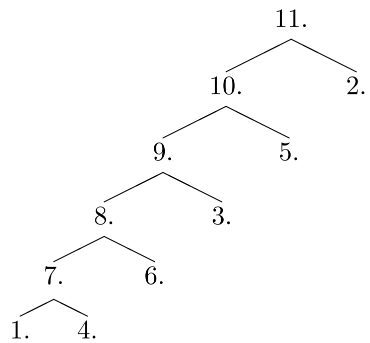
Nazwa	Pozytywnie	Negatywnie
A	5	3
B	3	6
C	2	
D	4	
E	1	6
H	2	5
K	4	1

Tabela *sugeruje*, że wniosek będzie miał postać: $D \cap C = \emptyset$.

Budujemy dowód rezolucyjny:

1.	$K' \cap E = \emptyset$	przesłanka
2.	$C \cap H = \emptyset$	przesłanka
3.	$B \cap A' = \emptyset$	przesłanka
4.	$K \cap D = \emptyset$	przesłanka
5.	$H' \cap A = \emptyset$	przesłanka
6.	$B' \cap E' = \emptyset$	przesłanka
7.	$E \cap D = \emptyset$	(★): 1,4, K
8.	$D \cap B' = \emptyset$	(★): 6,7, E
9.	$D \cap A' = \emptyset$	(★): 3,8, B
10.	$D \cap H' = \emptyset$	(★): 5,9, A
11.	$D \cap C = \emptyset$	(★): 2,10, H.

Wniosek z przesłanek 1.–6. można odczytać np.: ***Donkey are not easy to swallow***.
Drzewo dowodowe przedstawimy używając tylko numerów poszczególnych kroków:



3.2. Przykłady „oporne”

Analiza powyższych prostych przykładów mogłaby wskazywać, że rezolucja liniowa, wykorzystująca jedynie regułę (★) oraz reguły heurystyczne (budowanie wykazów i odczytywanie z nich sugerowanej postaci wniosku) wystarczą do znajdowania konkluzji dowolnego ciągu zdań kategorycznych. Tak jednak nie jest, jak przekonamy się za chwilę. Carroll wykrył to sam i można przypuszczać, iż to odkrycie inspirowało go do opracowania jego metody drzew.

PRZYKŁAD 3.5. Pierwszy przykład „oporny”: THE LIBRARY PROBLEM.

Rozważmy układ następujących zdań kategorycznych, odnoszących się do książek w pewnej bibliotece:

- 1. All the old books are Greek.
- 2. All the quartos are bound.
- 3. None of the poets are old quartos.

Znajdujemy nazwy występujące w tych zdaniach:

$$\begin{array}{lcl} A & — & \text{bound} \\ B & — & \text{Greek} \\ C & — & \text{old} \\ D & — & \text{poetry} \\ E & — & \text{quartos.} \end{array}$$

Znajdujemy schematy przesłanek:

$$\begin{array}{ll} 1. & C \cap B' = \emptyset \\ 2. & E \cap A' = \emptyset \\ 3. & D \cap C \cap E = \emptyset. \end{array}$$

Budujemy tabelę występowania nazw w przesłankach:

Nazwa	Pozytywnie	Negatywnie
A		2
B		1
C	1,3	
D	3	
E	2,3	

Widać, że na podstawie informacji z tej tabeli nie można wyeliminować, stosując (★), ***żadnej*** z rozważanych nazw. Carroll proponuje dołączyć dodatkową przesłankę, stwierdzającą, że suma wszystkich rozważanych nazw wyczerpuje całe uniwersum. W postaci zdania ogólno-przeczącego przesłanka ta przybiera postać:

- 4. $A' \cap B' \cap C' \cap D' \cap E' = \emptyset$.

Po tym uzupełnieniu rozszerzona tabela *sugeruje*, że wnioskiem będzie:

$$A' \cap B' = \emptyset.$$

Jest to jednak ***błędna*** sugestia. Kontrprzykład: niech $A = B = C = E = \{x\}$, $D = \{y\}$, $x \neq y$, a uniwersum to $\{x, y\}$. Wtedy 1.–4. są spełnione, ale $A' \cap B' = \{y\} \neq \emptyset$. Książka x może być np. starym, greckim, oprawionym *in quarto* wydaniem *Analityk Pierwszych* (które, jak wiadomo, poezją nie są), a y może być np. stosem luzem zebranych nowych kartek *in folio*, zawierającym elukubracje jakiegoś polskiego poety.

PRZYKŁAD 3.6. Drugi przykład „oporny": Z KORESPONDENCJI Z JOHNEM COOKIEM WILSONEM.

Korespondencja Carrolla z Johnem Cookiem Wilsonem dotycząca tego problemu zawiera m.in. uwagi Carrolla na temat sylogizmów, w których używa się zaprzeczeń ***iloczynów*** nazw, a także tego, co Carroll nazywa *konkluzjami częściowymi*. Warto zwrócić uwagę, że Carroll posługuje się tu nie tylko prawami De Morgana, ale również prawami rozdzielności: dodawania względem mnożenia i mnożenia względem dodawania nazw.

Carroll zachęca też Wilsona do rozwiązania następującego łańcusznika:

- 1. $A \subseteq B \cup C \cup D$
- 2. $A \cap B \subseteq C \cup H$
- 3. $B \subseteq A \cup C \cup D$
- 4. $B \cap C \cap E \subseteq D$
- 5. $C \cap D \subseteq A \cup B$
- 6. $E \subseteq A \cup B \cup D$
- 7. $B \cap D \subseteq A \cup H$
- 8. $A \cap C \cap K \subseteq B$
- 9. $D \cap K \subseteq B \cup C$.

Powyższe zdania ogólno-twierdzące przekształcają się na następujące zdania ogólnoprzeczące:

1. $A \cap B' \cap C' \cap D' = \emptyset$
2. $A \cap B \cap C' \cap H' = \emptyset$
3. $A' \cap B \cap C' \cap D' = \emptyset$
4. $B \cap C \cap D' \cap E = \emptyset$
5. $A' \cap B' \cap C \cap D = \emptyset$
6. $A' \cap B' \cap D' \cap E = \emptyset$
7. $A' \cap B \cap D \cap H' = \emptyset$
8. $A \cap B' \cap C \cap K = \emptyset$
9. $B' \cap C' \cap D \cap K = \emptyset$.

Sporządzamy tabelę występowania nazw w przesłankach:

Nazwa	Pozytywnie	Negatywnie
A	1,2,8	3,5,6,7
B	2,3,4,7	1,5,6,8,9
C	4,5,8	1,2,3,9
D	5,7	1,3,4,6
E	4,6,9	
H		2,7
K	8,9	

Tabela *sugeruje*, że wniosek będzie miał postać: $E \cap H' \cap K = \emptyset$.

Proponujemy (jako pokutę) próbę znalezienia dowodu rezolucyjnego wprost. ***Nie może*** się ona udać, co wykazać można dowodem nie wprost (zob. przykład 4.3. poniżej).

4. „Metoda drzew" Carrolla

16 lipca 1894 roku Carroll zanotował w swoim *Diary*:

> *Today has proved to be an epoch in my Logical work. It occurred to me to try a complex Sorites by the method I have been using for ascertaining what cells, if any, survive for possible occupation when certain nullities are given. I took one of 40 premisses, „pairs within pairs" & many bars, & worked it like a genealogy, each term providing all its descendents. It came out beatifully, & much shorter than the method I have used hitherto — I think of calling it the „Genealogical Method".*

Metodę tę nazywał Carroll również *metodą drzew* (*The Method of Trees*). Istota tej metody polega na przypuszczeniu nie wprost, że wniosek jest fałszywy i otrzymaniu sprzeczności z tego przypuszczenia, co w konsekwencji nakazuje owo przypuszczenie odrzucić. Pokażemy na przykładach, jak Carroll stosował tę metodę.

4.1. Drzewo bez rozgałęzień

PRZYKŁAD 4.1. Rozważmy układ ośmiu zdań kategorycznych:

1. $D' \cap N' \cap M' = \emptyset$
2. $K \cap A' \cap C' = \emptyset$
3. $L \cap E \cap M = \emptyset$
4. $D \cap H \cap K' = \emptyset$
5. $H' \cap L \cap A' = \emptyset$
6. $H \cap M' \cap B' = \emptyset$
7. $A' \cap B \cap N = \emptyset$
8. $A \cap M' \cap E = \emptyset$.

Budujemy tabelę występowania nazw w przesłankach:

Nazwa	Pozytywnie	Negatywnie
A	8	2,5,7
B	7	6
C		2
D	4	1
E	3,8	
H	4,6	5
K	2	4
L	3,5	
M	3	1,6,8
N	7	1

Tabela *sugeruje*, że wniosek powinien mieć postać: $C' \cap E \cap L = \emptyset$. Ponieważ siedem nazw będzie wyeliminowanych, więc dowód rezolucyjny składa się z 15 kroków (8 przesłanek oraz 7 zastosowań (★)). Można przedstawić też dowód nie wprost, jeśli nie krótszy (w tym akurat przypadku), to mający ogólniejszy walor. Przypuśćmy mianowicie, że $C' \cap E \cap L = \emptyset$ nie zachodzi. Wtedy

$$(\dagger) \quad C' \cap E \cap L \neq \emptyset$$

tj. zbiór $C' \cap E \cap L$ zawiera jakieś elementy. Pokażemy, że przypuszczenie to prowadzi do sprzeczności, a więc że należy je odrzucić.

Niech $x \in C' \cap E \cap L$. Ponieważ $x \in E \cap L$, a na mocy przesłanki 3. $(L \cap E) \cap M = \emptyset$, więc $x \notin M$, czyli $x \in M'$. Tak więc, $x \in E \cap M'$. Stąd, ponieważ $A \cap (M' \cap E) = \emptyset$ (przesłanka 8.), więc $x \notin A$, czyli $x \in A'$. Skoro $x \in C'$ (na mocy $(\dagger)$) oraz $x \in A'$, więc $x \notin K$ (na mocy przesłanki 2.: $K \cap (A' \cap C') = \emptyset$). A zatem $x \in K'$. Skoro $x \in E$ oraz $x \in A'$, to (na mocy przesłanki 5.: $H' \cap (L \cap A') = \emptyset$) $x \notin H'$, czyli $x \in H$. Skoro $x \in H$ i $x \in K'$, to (na mocy przesłanki 4.: $D \cap (H \cap K') = \emptyset$) $x \notin D$, czyli $x \in D'$. Skoro $x \in M'$ oraz $x \in H$, to (na mocy przesłanki 6.: $(H \cap M') \cap B' = \emptyset$) $x \notin B'$, czyli

$x \in B$. Skoro $x \in D'$ oraz $x \in M'$, to (na mocy przesłanki 1.: $(D' \cap M') \cap N' = \emptyset$) $x \notin N'$, czyli $x \in N$. Wreszcie, skoro $x \in A'$ oraz $x \in B$, to (na mocy przesłanki 7.: $(A' \cap B) \cap N = \emptyset$) $x \notin N$, czyli $x \in N'$. Ponieważ $N \cap N' = \emptyset$, otrzymaliśmy ***sprzeczność***: $x \in N$ oraz $x \in N'$. Musimy więc odrzucić przypuszczenie $(\dagger)$ i tym samym otrzymujemy wniosek $C' \cap E \cap L = \emptyset$.

Jak widać, był to dowód dla Humanistek, które lubią, gdy wypowiadamy się pełnymi zdaniami, niczego nie opuszczając. Spróbujmy teraz przedstawić ten dowód w nieco skróconej (i chyba bardziej przejrzystej) postaci:

1.	$D' \cap N' \cap M' = \emptyset$	przesłanka
2.	$K \cap A' \cap C' = \emptyset$	przesłanka
3.	$L \cap E \cap M = \emptyset$	przesłanka
4.	$D \cap H \cap K' = \emptyset$	przesłanka
5.	$H' \cap L \cap A' = \emptyset$	przesłanka
6.	$H \cap M' \cap B' = \emptyset$	przesłanka
7.	$A' \cap B \cap N = \emptyset$	przesłanka
8.	$A \cap M' \cap E = \emptyset$	przesłanka
9.	$x \in C' \cap E \cap L$	z.d.n.
10.	$x \in M'$	3,9
11.	$x \in A'$	8,9,10
12.	$x \in K'$	2,9,11
13.	$x \in H$	5,9,11
14.	$x \in D'$	4,12,13
15.	$x \in B$	6,10,13
16.	$x \in N$	1,10,14
17.	$x \in N'$	7,11,15
18.	$\perp$	SPRZECZNOŚĆ: 16,17.

Ostatecznie, udowodniliśmy, że $C' \cap E \cap L = \emptyset$. W formie ogólno-twierdzącej zdanie to przyjmuje np. postać: $(E \cap L) \subseteq C$.

4.2. Drzewo z rozgałęzieniami

PRZYKŁAD 4.2. Rozważmy siedem zdań kategorycznych:

1. $H \cap M \cap K = \emptyset$
2. $D' \cap E' \cap C' = \emptyset$
3. $H \cap K' \cap A' = \emptyset$
4. $B \cap L \cap H' = \emptyset$
5. $C \cap K \cap M' = \emptyset$
6. $H \cap C' \cap E = \emptyset$
7. $B \cap A \cap K' = \emptyset$.

Budujemy tabelę występowania nazw w przesłankach:

Nazwa	Pozytywnie	Negatywnie
A	7	3
B	4,7	
C	5	2,6
D		2
E	6	2
H	1,3,6	4
K	1,5	3,7
L	4	
M	1	5

Tabela *sugeruje*, że wniosek powinien mieć postać $B \cap D' \cap L = \emptyset$. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że:

$$(\ddagger) \quad B \cap D' \cap L \neq \emptyset.$$

Pokażemy, że przypuszczenie to prowadzi do sprzeczności, a więc że należy je odrzucić.

Niech $x \in B \cap D' \cap L$. Wtedy, skoro $x \in B \cap L$, więc na mocy przesłanki 4. $x \notin H'$, czyli $x \in H$. Skoro $x \in H$ oraz, na mocy przesłanki 1. $H \cap M \cap K = \emptyset$, to $x \notin M \cap K$. Jednak nie można dalej prowadzić dowodu w sposób liniowy, trzeba rozumowanie rozgałęzić, ponieważ $x \notin M \cap K$ oznacza, że zachodzi alternatywa:

- (1) $x \notin K$, czyli $x \in K'$ ***lub***
- (2) $x \notin M$, czyli $x \in M'$.

Każdy z przypadków (1) i (2) należy teraz rozpatrzyć oddzielnie. Dziś jest to dla nas oczywiste: odwołujemy się do jednego z praw De Morgana. Carroll sformułował samodzielnie to prawo (w liście z 11 listopada 1896 roku do Johna Cooka Wilsona), nie powołując się na inne publikacje z tego, co dziś nazywamy nurtem algebraicznym w logice XIX wieku. Na marginesie dodajmy, że prawa znane dziś pod nazwą praw De Morgana były znane już logikom średniowiecznym. Wracamy do dowodu. Carroll konstatuje w tym miejscu, że:

- (1') do warunku (1) można dodać warunek $x \in M$, co jednak nie przyniesie żadnej korzyści, ponieważ M występowała tylko w przesłance 1., którą już wykorzystaliśmy;
- (2') do warunku (2) można dodać warunek $x \in K$, co być może okaże się użyteczne, jako iż K występuje w dotąd nie rozważanej przesłance 5.

Za uzasadnienie (1') oraz (2') Carroll uważa sformułowaną przez siebie ***regułę***:

> *Thus, if we found a Premiss proving that the Thing* could not *have the Pair of Attributes $b'c$, we might say it* must *have b or c'. And we might afterwards tack on, at pleasure, either c to b, making the two headings bc and c', or b' to c', making them b and $c'b'$.*

Carroll odwołuje się tutaj zatem do obserwacji, którą w dzisiejszej notacji zapisujemy w postaci:

$$(A \cap B)' = (A' \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B').$$

Można przypuszczać, że obserwację tę zawdzięcza analizie swoich diagramów dla zbiorów.

(1) Skoro $x \in K'$, to z $x \in H$ oraz z przesłanki 3. otrzymujemy: $x \notin A'$, czyli $x \in A$. Skoro $x \in K'$ oraz $x \in A$, to z przesłanki 7. otrzymujemy, że $x \notin A$. A to oznacza sprzeczność: nie może być jednocześnie $x \in A$ oraz $x \notin A$.

(2) Skoro $x \in M'$, to na mocy (2') oraz przesłanki 5. otrzymujemy, że $x \notin C$, czyli $x \in C'$. Skoro $x \in D'$ (przypuszczenie (‡)) oraz $x \in C'$, to na mocy przesłanki 2. mamy $x \notin E'$, czyli $x \in E$. Wreszcie, skoro $x \in H$ oraz $x \in C'$, to na mocy przesłanki 6. mamy $x \notin E$. A to oznacza sprzeczność: nie może być jednocześnie $x \in E$ oraz $x \notin E$.

Pokazaliśmy zatem, że ***każda*** z możliwości (1) i (2) prowadzi do sprzeczności. Przypuszczenie (‡) należy więc odrzucić. Ostatecznie otrzymujemy:

$$B \cap D' \cap L = \emptyset.$$

Przekształcając to na zdanie ogólno-twierdzące (jeśli ktoś takie woli) dostajemy: $(B \cap L) \subseteq D$.

Carroll rozważa również o wiele bardziej skomplikowane dowody nie wprost, o złożonych drzewach dowodowych.

4.3. Drzewa z gałęziami otwartymi

A jak radził sobie Carroll z przypadkami, gdy przypuszczenie dowodu nie wprost ***nie prowadziło*** do sprzeczności? Przykład znajdujemy w liście Carrolla do Johna Cooka Wilsona z 18 listopada 1896 roku:

PRZYKŁAD 4.3. Przypomnijmy dziewięć zdań kategorycznych z przykładu 3.5.:

1. $A \cap B' \cap C' \cap D' = \emptyset$
2. $A \cap B \cap C' \cap H' = \emptyset$
3. $B \cap A' \cap C' \cap D' = \emptyset$
4. $B \cap C \cap E \cap D' = \emptyset$
5. $C \cap D \cap A' \cap B' = \emptyset$
6. $E \cap A' \cap B' \cap D' = \emptyset$
7. $B \cap D \cap A' \cap H' = \emptyset$
8. $A \cap C \cap K \cap B' = \emptyset$
9. $D \cap K \cap B' \cap C' = \emptyset$.

Budujemy tabelę występowania nazw w przesłankach:

Nazwa	Pozytywnie	Negatywnie
A	1,2,8	3,5,6,7
B	2,3,4,7	1,5,6,8,9
C	4,5,8	1,2,3,9
D	5,7,9	1,3,4,6
E	4,6	
H		2,7
K	8,9	

Tabela ta *sugeruje*, że wniosek powinien mieć postać: $E \cap H' \cap K = \emptyset$. Pokażemy, że jest to ***błędna*** sugestia. Nie oznacza to, że metoda rezolucji stosowana przez Carrolla jest nietrafna, a tylko tyle, że nie do każdego zbioru przesłanek (zdań ogólnych) można ją stosować. Oznacza nadto m.in. to, że w logice ***nie wolno kierować się wyłącznie sugestiami*** **—** każda teza musi posiadać wyraźny, nie budzący wątpliwości dowód.

Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że:

$$E \cap H' \cap K \neq \emptyset.$$

Niech $x \in E \cap H' \cap K$. Skoro $x \in E$, to, na mocy przesłanki 4., mamy: $x \notin B \cap (C \cap D')$ a więc zachodzi alternatywa:

- (1) $x \in B'$
- (2) $x \in (C \cap D')'$.

Rozważmy najpierw przypadek (1). Skoro $x \in E$ oraz $x \in B'$, to, na mocy przesłanki 6. $x \notin (A' \cap D')$, a więc zachodzi alternatywa:

- (1.1.) $x \in A$
- (1.2.) $x \in D$.

Rozpatrzmy przypadek (1.1.). Skoro $x \in A$, $x \in B'$ oraz $x \in K$, to, na mocy przesłanki 8., $x \notin C$, czyli $x \in C'$. Z $x \in A$, $x \in B'$ oraz $x \in C'$, na mocy przesłanki 1. mamy: $x \notin D'$, czyli $x \in D$. Wreszcie, skoro $x \in K$, $x \in B'$ oraz $x \in C'$, to, na mocy przesłanki 1., mamy: $x \notin D$. Otrzymaliśmy zatem sprzeczność: $x \in D$ i $x \notin D$. Przypadek (1.1.) został wykluczony.

Wracamy do przypadku (1.2.). Carroll czyni w tym miejscu dodatkowe założenie, że $x \in A'$, uzasadniając je powołaniem się na przytoczoną wyżej *regułę*. Skoro $x \in B'$, $x \in D$ oraz $x \in A'$, to, na mocy przesłanki 5., $x \notin C$, czyli $x \in C'$. Skoro $x \in K$, $x \in B'$ oraz $x \in D$, to, na mocy przesłanki 9., $x \notin C'$. Otrzymaliśmy sprzeczność: $x \in C'$ i $x \notin C'$. Przypadek (1.2.) został więc wykluczony.

Wracamy do przypadku (2). Znowu, powołując się na cytowaną *regułę*, Carroll przyjmuje założenie, że $x \in B$. Skoro $x \in (C \cap D')'$, to zachodzi alternatywa:

- (2.1.) $x \in C'$ (oraz $x \in B$)

- (2.2.) $x \in D$ (oraz $x \in B$).

Rozpatrzmy przypadek (2.1.). Skoro $x \in H'$, $x \in C'$ oraz $x \in B$, to, na mocy przesłanki 2., $x \notin A$, czyli $x \in A'$. Skoro $x \in B$, $x \in A'$ oraz $x \in C'$, to na mocy przesłanki 3., $x \notin D'$, czyli $x \in D$. Wreszcie, skoro $x \in H'$, $x \in B$ oraz $x \in A'$, to, na mocy przesłanki 7., $x \notin D$ i otrzymujemy sprzeczność z $x \in D$. Tak więc, przypadek (2.1.) został wykluczony.

Rozpatrzmy przypadek (2.2.). Skoro $x \in H'$, $x \in B$ oraz $x \in D$, to, na mocy przesłanki 7. mamy: $x \notin A'$, czyli $x \in A$. Nie możemy skorzystać z żadnej przesłanki, aby wykluczyć przypadek (2.2.). Tak więc, przypuszczenie dowodu nie wprost zostało potwierdzone, a to oznacza, że zdanie $E \cap H' \cap K = \emptyset$ ***nie jest*** konsekwencją założeń 1.–9. Sytuacja, że przesłanki łańcusznika są prawdziwe, a jego wniosek fałszywy nie została wykluczona. Może istnieć przedmiot x taki, że $x \in E \cap H' \cap K$ oraz wszystkie przesłanki 1.–9. są prawdziwe. Z analizy przypadku (2.2.) widać, że dla takiego x mamy: $x \in A \cap B \cap C \cap D$.

Analiza przypadku (2.2.) pokazuje ponadto, jakie wnioski **wynikają** logicznie z podanego układu przesłanek. Otóż jest to np. każde ze zdań:

- $E \cap H' \cap K \cap A' = \emptyset$
- $E \cap H' \cap K \cap B' = \emptyset$
- $E \cap H' \cap K \cap C' = \emptyset$
- $E \cap H' \cap K \cap D' = \emptyset$.

Jest tak, ponieważ z każdego z tych zdań, łącznie z rozważanymi przesłankami, otrzymać można ***sprzeczność*** w przypadku (2.2.), a więc przypadek ten wykluczyć.

Dalej, analiza przypadku (2.2.) pokazuje także, że dołączenie do 1.–9. ***każdej z osobna*** z przesłanek 10.–13:

- 10. $A = \emptyset$
- 11. $B = \emptyset$
- 12. $C = \emptyset$
- 13. $D = \emptyset$

powoduje, że z takiego dziesięcioelementowego zbioru przesłanek ***wynika*** logicznie $E \cap H' \cap K = \emptyset$.

Oczywiście takie modyfikacje „łamią symetrię” w przykładzie Carrolla. Celem analizy tego przykładu było zresztą co innego, a mianowicie pokazanie, że metoda drzew pozwala orzec, że jakiś wniosek ***nie wynika*** logicznie z ustalonego zbioru przesłanek.

Uwaga 6. Oczywiście Carroll nie używa w swoim dowodzie teoriomnogościowego symbolu $\in$: posługuje się wyłącznie algebrą zbiorów.

Powyższy przykład nie pokazuje (wbrew temu, co twierdził John Cook Wilson we wspomnianej korespondencji) klęski metody Carrolla badania łańcuszników. Jest całkiem odwrotnie. Można przypuszczać, że Carroll, po odkryciu swojej „metody drzew", sformułowałby — gdyby Los dał mu więcej czasu — reguły rządzące tego typu dowodami apagogicznymi, przynajmniej dla sylogistyki (z dowolnymi kombinacjami Boolowskimi nazw). Mniej uzasadnione jest przypuszczenie, że mógłby rozszerzyć tę metodę np. na rachunek zdań.

5. Uwagi metalogiczne i historyczne

Dodajmy jeszcze kilka uwag, które mamy nadzieję rozwinąć w innym miejscu.

5.1. Uwagi metalogiczne

Jak widzieliśmy w przykładach 3.5. oraz 4.3., metody rozwiązywania łańcuszników nie można sprowadzić do zwykłej rezolucji liniowej. Natomiast metoda nie wprost („metoda drzew") ma walor ogólny: można ja stosować do ***dowolnego*** zbioru przesłanek (tu: do dowolnych zdań kategorycznych) mając pewność, że wychodząc od zaprzeczenia konkluzji dojdzie się do jednego z następujących, wykluczających się wzajem przypadków:

- (1) przesłanki i zaprzeczona konkluzja prowadzą do ***sprzeczności***; wtedy konkluzja ***wynika*** logicznie z przesłanek;
- (2) przesłanki i zaprzeczona konkluzja ***nie*** prowadzą do ***sprzeczności***; wtedy konkluzja ***nie wynika*** logicznie z przesłanek.

Oczywiście, osobno należy podać dowód ***poprawności*** „metody drzew" Carrolla, tj. wykazać, że jest ona ***trafna*** oraz ***pełna***. Dowód taki istnieje dla Klasycznego Rachunku Predykatów, a więc obejmuje również wszelkie wnioskowania z użyciem zdań kategorycznych. Można też zbudować osobny rachunek sylogistyczny z metodą drzew i dowieść jej poprawności — zob. np. Simons 1989.

Czy materiał zgromadzony w *Symbolic Logic* jest oparty na jakimś ***systemie*** logicznym? Jeśli tak, to na jakim? Jak zauważa Bartley, Carroll stosował metodę tablic dla funkcji prawdziwościowych już w 1894 roku, a więc wcześniej od propozycji Emila Posta oraz Ludwiga Wittgensteina. Klasyczna sylogistyka jest w całości zawarta w algebraicznym ujęciu Carrolla przedstawionym w *Symbolic Logic* z 1896 roku. Jak widzieliśmy wyżej, Carroll stosował też apagogiczną metodę drzew, której początek datuje się zwykle od prac Betha, Hintikki, Kangera i Schütte'go z końca lat pięćdziesiątych XX wieku, a której rozwinięcia dokonali m.in. Smullyan, Lis i Jeffrey. Jak wiadomo, obecnie metoda ta jest jedną z ważniejszych metod dowodowych stosowanych w praktyce (np. w automatycznym dowodzeniu twierdzeń).

5.2. Problem otwarty?

Niech $\mathbb{S}$ będzie rodziną *nullities* o postaci:

$$\begin{array}{l} X^{11} \cap X^{12} \cap \ldots \cap X^{1n_1} = \emptyset \\ X^{21} \cap X^{22} \cap \ldots \cap X^{2n_2} = \emptyset \\ \ldots \\ X^{m1} \cap X^{m2} \cap \ldots \cap X^{mn_m} = \emptyset \end{array}$$

gdzie $\mathbf{R}(\mathbb{S})$, zbiór wszystkich *retinends* systemu $\mathbb{S}$, jest niepusty.

Wydaje się, że rozwiązanie następującego problemu (a może to tylko ćwiczenie?) pokazałoby w pełniejszej perspektywie metalogicznej metodę Carrolla rozwiązywania łańcuszników przy pomocy reguły (★):

(★★) Znaleźć warunki konieczne i wystarczające na to, aby *nullity*

$$\bigcap \mathbf{R}(\mathbb{S}) = \emptyset$$

wynikało logicznie ze zbioru *nullities* $\mathbb{S}$.

Zauważmy, że problem ten może być również sformułowany (przy wykorzystaniu praw De Morgana w algebrze zbiorów) jako problem dotyczący rodziny pokryć uniwersum U.

Rozwiązanie problemu (★★) dostarczyłoby czegoś w rodzaju *Twierdzenia o Pełności* dla *The Method of Underscoring* Carrolla. Chociaż sama reguła (★) nie wystarcza do rozwiązywania ***dowolnych*** łańcuszników przy stosowaniu reguł heurystycznych proponowanych przez Carrolla, można rozsądnie pytać o klasę tych łańcuszników, dla których ten zespół reguł jest trafny i pełny.

Zauważmy także, że rozwiązanie problemu (★★) powinno zostać podane w terminach czysto algebraicznych, jeśli chcemy być wierni metodom stosowanym przez Carrolla. Oczywiście, nie można wykluczyć innych metod rozwiązania problemu (★★): byłyby one jednak anachronizmem wobec systemu logicznego używanego przez Lewisa Carrolla.

5.3. Uwagi historyczne

Dzieło logiczne Carrolla powstało pod koniec XIX wieku, w okresie, gdy rozwijał się całkiem nowy nurt w logice: ***podejście algebraiczne*** zapoczątkowane pracami George'a Boole'a oraz Augustusa De Morgana, a mające swoją kulminację w dziele Ernsta Schrödera. W wysiłku tym uczestniczyli m.in.: MacColl, Peirce, Jevons, Venn, by wymienić tylko kilka znakomitości.

Carroll znał dokonania pracujących na tym polu. Jego *Symbolic Logic* nie jest jednak monografią pisaną z zamiarem tworzenia ***systemu*** logicznego. Pierwszoplanowy cel był natomiast *dydaktyczny*: książka miała służyć popularyzacji logiki. I cel ten został osiągnięty: ***do dzisiaj*** tekst ten służy jako pomoc dydaktyczna, z upodobaniem wykorzystywana przez wielu wykładowców. Bez wątpliwości, ten sukces edukacyjny jest po części wynikiem literackiego talentu autora.

Część pierwsza *Symbolic Logic* ma bardzo elementarny charakter, stanowi przystępne wprowadzenie do sylogistyki klasycznej. Zawiera też omówienie metody diagramów Carrolla oraz jego metody *underscoring* (prototypu dzisiejszej *rezolucji liniowej*).

Odnaleziona po siedemdziesięciu latach przez W.W. Bartleya część druga zawiera problemy bardziej zaawansowane (np. zdania kategoryczne ze złożonymi podmiotami i orzecznikami) oraz wprowadza metodę drzew. Sześć rozdziałów tej części nie zostało odnalezionych.

Carroll zapowiadał część trzecią: *Part III: Transcendental*, do której miał — wedle jego słów — sporo notatek. O ile wiadomo, część ta nie powstała w wersji gotowej do druku. Dwa z zapowiadanych rozdziałów tej części nosić miały tytuły: *Analysis of a Proposition into its Elements* oraz *The Theory of Inference*.

* * *

Jak wiadomo, po śmierci Carrolla olbrzymia liczba jego pieczołowicie zbieranych i skatagolowanych notatek została

S P A L O N A.

Wykorzystywana literatura

Abeles, F. 1990. Lewis Carroll's Method of Trees: Its Origin in „Studies in Logic". *Modern Logic* **1**, 25–35.

Abeles, F. 2005. Lewis Carroll's Formal Logic. *History and Philosophy of Logic* **26**, 33–46.

Bartley, W.W., III. 1977. *Lewis Carroll's Symbolic Logic.* Clarkson N. Potter, New York.

Carroll, L. 1896. *Symbolic Logic.* Macmillan, London.

Carroll, L. 1994. *El juego de la lógica y otros escritos.* El Libro de Bolsillo, Madrid.

Coquand, Th. 2000. Lewis Carroll, Gentzen and Entailment Relations.
http://en.scientificcommons.org/265225

Crisler, V. 1999. Logical Algebra: Part 2. The Sorites.
http://vernerable.tripod.com/logic1.htm

Grattan-Guiness, I. 2000. *The Search for Mathematical Roots, 1870–1940. Logics, Set Theories and the Foundation of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*. Princeton University Press, Princeton/Oxford.

Jussien, N. Programmation Logique — TP noté. Les sorites de Lewis Carroll.
http://www.emn.fr/x-info/jussien/prolog/data/tp-sorites-prolog.pdf

Peckhaus, V. 1999. 19th Century Logic Between Philosophy and Mathematics. *Bulletin of Symbolic Logic* **5**, 433–450.

Simons, P. 1989. Tree Proofs for Syllogistic. *Studia Logica* **48**, 539–554.