Preliminaria logiczne

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

MDTiAR

Plan na dziś

- Udowodnimy Lemat Hintikki (dla KRZ).
- Wprowadzimy pojęcie *własności niesprzeczności*.
- Udowodnimy twierdzenie o istnieniu modelu (dla KRZ).
- Udowodnimy twierdzenie o zwartości (dla KRZ).

- Poznamy ogólne operacje konsekwencji.
- Poznamy operacje konsekwencji wyznaczone przez reguły, konsekwencje matrycowe oraz odrzucające.

- Poznamy kilka przydatnych pojęć algebraicznych:
  - Kraty
  - Algebry Heytinga
  - Algebry Boole'a

Zbiory Hintikki

Zbiór **H** formuł języka KRZ nazywamy *zdaniowym zbiorem Hintikki*, jeśli:

1. Dla dowolnej zmiennej zdaniowej p, zachodzi co najmniej jedno z dwojga: $p \notin \mathbf{H}$ lub $\neg p \notin \mathbf{H}$
2. $\bot \notin \mathbf{H}$ oraz $\neg \top \notin \mathbf{H}$;
3. Jeśli $\neg\neg\psi \in \mathbf{H}$, to $\psi \in \mathbf{H}$;
4. Jeśli $\alpha \in \mathbf{H}$, to $\alpha_1 \in \mathbf{H}$ oraz $\alpha_2 \in \mathbf{H}$;
5. Jeśli $\beta \in \mathbf{H}$, to $\beta_1 \in \mathbf{H}$ lub $\beta_2 \in \mathbf{H}$.

- Zbiory Hintikki nazywa się także zbiorami *nasyconymi w dół* (*downward saturated*). Może trafniej byłoby mówić: *nasycone w głąb*? Cantor mówił podobno, że wyobraża sobie zbiory jako *przepaście*.

Lemat Hintikki

Lemat Hintikki. Każdy zdaniowy zbiór Hintikki jest spełnialny.

Dowód. Niech $\mathbf{H}$ będzie zbiorem Hintikki. Zbudujemy wartościowanie v, przy którym każdy element zbioru $\mathbf{H}$ przyjmie wartość 1.

- Jeśli $p \in \mathbf{H}$, to niech $v(p) = 1$. Jeśli $\neg p \in \mathbf{H}$, to niech $v(p) = 0$. Jeśli ani p ani $\neg p$ nie należą do $\mathbf{H}$, to niech $v(p) = 0$. Wreszcie, niech $v(\bot) = v(\neg\top) = 0$.
- Jak pamiętamy z semantyki KRZ, wartościowanie v można jednoznacznie rozszerzyć do odwzorowania v^* wszystkich formuł zdaniowych w zbiór $\{0, 1\}$.
- Wtedy $v^*(\psi) = 1$ dla wszystkich $\psi \in \mathbf{H}$, czego dowodzimy np. przez indukcję po randze formuł.

Lemat Hintikki

- Dla zmiennych zdaniowych mamy $v^*(p) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in \mathbf{H}$. Dalej, $v^*(\bot) = v^*(\neg\top) = 0$ na mocy definicji v. Tak więc, $v^*(\psi) = 1$ dla wszystkich formuł o randze 0 należących do $\mathbf{H}$.
- Załóżmy, że dla wszystkich formuł $\psi \in \mathbf{H}$ rangi mniejszej od $n > 0$ zachodzi $v^*(\psi) = 1$.
- Jeśli α ma rangę n, to α_1 oraz α_2 są elementami $\mathbf{H}$ oraz mają rangę mniejszą od n. Z założenia indukcyjnego $v^*(\alpha_1) = 1 = v^*(\alpha_2)$. Wtedy $v^*(\alpha) = 1$.
- Jeśli β ma rangę n, to albo $\beta_1 \in \mathbf{H}$ albo $\beta_2 \in \mathbf{H}$. Nadto, β_1 oraz β_2 mają rangę mniejszą od n. Z założenia indukcyjnego: albo $v^*(\beta_1) = 1$ albo $v^*(\beta_2) = 1$. A zatem $v^*(\beta) = 1$.

Sprzeczność to śmierć logiczna

Niech $\mathcal{C}$ będzie rodziną zbiorów formuł języka KRZ. Mówimy, że $\mathcal{C}$ jest *zdaniową własnością niesprzeczności* (*propositional consistency property*), jeśli dla każdego zbioru $S \in \mathcal{C}$:

1. Dla każdej zmiennej zdaniowej p: albo $p \notin S$ albo $\neg p \notin S$
2. $\bot \notin S$ oraz $\neg \top \notin S$
3. Jeśli $\neg\neg\psi \in S$, to $S \cup \{\psi\} \in S$
4. Jeśli $\alpha \in S$, to $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathcal{C}$
5. Jeśli $\beta \in S$, to $S \cup \{\beta_1\} \in \mathcal{C}$ lub $S \cup \{\beta_2\} \in \mathcal{C}$.

- Tak więc, każda własność niesprzeczności jest rodziną zbiorów, spełniającą pewne warunki domknięcia.
- Jeśli $S \in \mathcal{C}$, to mówimy, że S jest $\mathcal{C}$-*niesprzeczny*.

Przykłady

- Rodzina wszystkich zbiorów niesprzecznych jest zdaniową własnością niesprzeczności.
- Rodzina wszystkich zbiorów spełnialnych jest zdaniową własnością niesprzeczności.
- Rodzina wszystkich zbiorów, których każdy skończony podzbiór jest spełnialny, jest zdaniową własnością niesprzeczności.

- Nazwiemy zbiór formuł S *tablicowo niesprzecznym*, gdy nie istnieje zamknięta tablica analityczna dla S. Rodzina wszystkich zbiorów tablicowo niesprzecznych jest zdaniową własnością niesprzeczności.
- Pojęcie *własności niesprzeczności* można określić także dla logiki pierwszego rzędu.
- Pojęcie *własności niesprzeczności* można określić dla różnych metod dowodowych.

Oswajanie własności niesprzeczności

- Własność niesprzeczności $\mathcal{C}$ jest *domknięta na podzbiory*, gdy dla każdego $S \in \mathcal{C}$ oraz wszystkich $T \subseteq S$: $T \in \mathcal{C}$.
- Własność niesprzeczności $\mathcal{C}$ jest *charakteru skończonego*, gdy: $S \in \mathcal{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy skończony podzbiór zbioru S należy do $\mathcal{C}$.

1. Każda własność niesprzeczności może zostać rozszerzona do własności niesprzeczności domkniętej na podzbiory.
2. Każda własność niesprzeczności charakteru skończonego jest domknięta na podzbiory.
3. Każda własność niesprzeczności domknięta na podzbiory może zostać rozszerzona do własności niesprzeczności charakteru skończonego.

Ćwiczenie: udowodnij powyższe punkty 1–3 (konwersatorium).

Przerywnik muzyczny: Logic rap

Profesor:

Bierzemy ciąg niesprzecznych zbiorów, wstępujący ściśle.
To jaka jest ich suma, niech ja tylko pomyślę.
Ona też jest niesprzeczna, mój młody kolego.
Ty pytasz: panie psorze, ach, dlaczego, dlaczego?
Dowód podam nie wprost, jak w kościele na tacę.
Przypuśćmy, drodzy goście, że byłoby inaczej.
Gdyby była sprzeczna, no to nie ma siły:
Sprzeczność już na którymś piętrze by się pojawiła.
Co przeczy założeniu oraz kończy dowód.

Studenci:

I wszystkim nam dostarcza doskonały powód,
By zakończyć ten wykład i żywo na piwo!

1. Pierwsze założenie za mocne, ale ratuje rym.
2. Były jeszcze dwie (obsceniczne) linijki, które tu opuszczamy.

Domkniętość na sumy łańcuchów

- Załóżmy, że $\mathcal{C}$ jest własnością niesprzeczności charakteru skończonego oraz że S_1, S_2, S_3, ... jest łańcuchem wstępującym (ze względu na inkluzję) elementów rodziny $\mathcal{C}$. Wtedy $\bigcup_n S_n \in \mathcal{C}$.

Dowód. Ponieważ $\mathcal{C}$ jest własnością niesprzeczności charakteru skończonego, więc wystarczy udowodnić, że każdy skończony podzbiór zbioru $\bigcup_n S_n$ należy do $\mathcal{C}$.

Przypuśćmy, że $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\} \subseteq \bigcup_n S_n$. Pokażemy, że $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\} \in \mathcal{C}$.

Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant k$ istnieje najmniejszy indeks n_i taki, że $\psi_i \in S_{n_i}$. Niech $m = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Wtedy $\psi_i \in S_m$ dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant k$. Ponieważ $S_m \in \mathcal{C}$ oraz $\mathcal{C}$ jest domknięta na podzbiory, więc $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\} \in \mathcal{C}$.

Niesprzeczność daje szansę

Twierdzenie o Istnieniu Modelu (dla KRZ). Jeśli $\mathcal{C}$ jest zdaniową własnością niesprzeczności oraz $S \in \mathcal{C}$, to S jest spełnialny.

- Twierdzenie to będzie wielokrotnie wykorzystane w dowodach pełności rozważanych metod dowodowych.
- Dowód tego twierdzenia istotnie korzysta z Lematu Hintikki.
- Zasadniczy pomysł polega na tym, że każdy zbiór S z rozważanej własności niesprzeczności $\mathcal{C}$ można rozszerzyć do pewnego zbioru Hintikki $\mathbf{H}_S$, również należącego do $\mathcal{C}$. Skoro $S \subseteq \mathbf{H}_S$, a $\mathbf{H}_S$ jest spełnialny (Lemat Hintikki!), to również S jest spełnialny.

Dowód Twierdzenia o Istnieniu Modelu

- Załóżmy, że $S \in \mathcal{C}$.
- Na mocy poprzednich ustaleń możemy założyć, że $\mathcal{C}$ jest charakteru skończonego.
- Ustawiamy wszystkie formuły języka KRZ w ciąg przeliczalny: $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ (w porządku leksykograficznym).
- Definiujemy ciąg S_1, S_2, $S_3, \ldots$ elementów $\mathcal{C}$ w sposób następujący:
  - $S_1 = S$
  - $S_{n+1} = S_n \cup \{\psi_n\}$, o ile $S_n \cup \{\psi_n\} \in \mathcal{C}$, natomiast $S_{n+1} = S_n$ w przeciwnym przypadku.
- Wszystkie elementy tego ciągu należą do $\mathcal{C}$ i tworzą łańcuch wstępujący. Niech $\mathbf{H}_S = \bigcup_n S_n$. Wtedy $S \subseteq \mathbf{H}_S$.
- Ponieważ $\mathcal{C}$ jest charakteru skończonego i jest domknięta na sumy łańcuchów, więc $\mathbf{H}_S \in \mathcal{C}$.

Dowód Twierdzenia o Istnieniu Modelu

$\mathbf{H}_S$ *jest elementem maksymalnym w* $\mathcal{C}$: Przypuśćmy, że istnieje $K \in \mathcal{C}$ taki, że: $\mathbf{H}_S \subseteq K$ oraz $\mathbf{H}_S \neq K$. Wtedy istnieje $\psi_n \in K - \mathbf{H}_S$. Oznacza to, że $\psi_n \notin S_{n+1}$, a zatem $S_n \cup \{\psi_n\} \notin \mathcal{C}$.
Jednak $S_n \cup \{\psi_n\} \subseteq K$, ponieważ $S_n \subseteq \mathbf{H}_S \subseteq K$ oraz $\psi_n \in K$. Ponieważ $\mathcal{C}$ jest domknięta na podzbiory, więc $S_n \cup \{\psi_n\} \in \mathcal{C}$, sprzeczność.

$\mathbf{H}_S$ *jest zbiorem Hintikki:* Warunki dla zmiennych zdaniowych oraz $\bot$ i $\neg\top$ zachodzą na mocy konstrukcji zbioru $\mathbf{H}_S$ oraz definicji rodziny $\mathcal{C}$. Jeśli $\neg\neg\psi \in \mathbf{H}_S$, to $\psi \in \mathbf{H}_S$, ponieważ $\mathbf{H}_S \in \mathcal{C}$. Załóżmy, że $\alpha \in \mathbf{H}_S$. Ponieważ $\mathbf{H}_S \in \mathcal{C}$, więc $\mathbf{H}_S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathcal{C}$. Ponieważ $\mathbf{H}_S$ jest maksymalny, więc $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subseteq \mathbf{H}_S$. Załóżmy, że $\beta \in \mathbf{H}_S$. Ponieważ $\mathbf{H}_S \in \mathcal{C}$, więc $\mathbf{H}_S \cup \{\beta_1\} \in \mathcal{C}\}$ lub $\mathbf{H}_S \cup \{\beta_2\} \in \mathcal{C}\}$. Ponieważ $\mathbf{H}_S$ jest maksymalny, więc $\beta_1 \in \mathbf{H}_S$ lub $\beta_2 \in \mathbf{H}_S$.

Na mocy Lematu Hintikki S jest spełnialny, ponieważ $S \subseteq \mathbf{H}_S$.

Zastosowanie Twierdzenia o Istnieniu Modelu

Twierdzenie o Zwartości. Niech S będzie zbiorem formuł języka KRZ. Jeśli każdy skończony podzbiór zbioru S jest spełnialny, to S jest spełnialny.

Dowód. Załóżmy, że każdy skończony podzbiór zbioru S jest spełnialny. Plan dowodu jest następujący:

- Definiujemy rodzinę $\mathcal{C}$ zbiorów formuł języka KRZ jako rodzinę tych wszystkich zbiorów formuł, których każdy skończony podzbiór jest spełnialny.
- Wtedy oczywiście $S \in \mathcal{C}$.
- Trzeba będzie pokazać, że $\mathcal{C}$ jest własnością niesprzeczności.
- Następnie wystarczy skorzystać z Twierdzenia o Istnieniu Modelu.

Dowód Twierdzenia o Zwartości

Przypuśćmy, że $W \in \mathcal{C}$ oraz $\{p, \neg p\} \subseteq W$ dla pewnej zmiennej zdaniowej p. Zbiór $\{p, \neg p\}$ jest skończony, ale nie jest spełnialny, a więc początkowe przypuszczenie musi zostać odrzucone.
Oczywiście, jeśli $W \in \mathcal{C}$ oraz $\neg\neg\psi \in W$, to $W \cup \{\psi\} \in \mathcal{C}$.

Załóżmy, że $W \in \mathcal{C}$ oraz $\alpha \in W$. Pokażemy, że każdy skończony podzbiór zbioru $W \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ jest spełnialny, czyli $W \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathcal{C}$. Skończony podzbiór zbioru $W \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ może: nie zawierać żadnej z formuł α_1, α_2, zawierać dokładnie jedną z nich, zawierać obie. Wystarczy rozważyć ostatni przypadek, czyli $W_0 \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$, gdzie W_0 jest skończonym podzbiorem W. Wtedy $W_0 \cup \{\alpha\}$ też jest skończonym podzbiorem W, a więc jest spełnialny. Dowolne wartościowanie posyłające każdy element zbioru $W_0 \cup \{\alpha\}$ w 1 musi zatem posyłać w 1 zarówno α_1 jak i α_2. Oznacza to, że $W_0 \cup \{\alpha, \alpha_1, \alpha_2\}$ jest spełnialny, z zatem $W_0 \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ jest spełnialny.

Dowód Twierdzenia o Zwartości

- Załóżmy, że $W \in \mathcal{C}$ oraz $\beta \in W$. Pokażemy, że: albo $W \cup \{\beta_1\} \in \mathcal{C}$ albo $W \cup \{\beta_2\} \in \mathcal{C}$. Niech W_0 będzie skończonym podzbiorem W.
- $W_0 \cup \{\beta\}$ także jest skończonym podzbiorem W, a więc jest spełnialny: istnieje wartościowanie v posyłające każdy element zbioru $W_0 \cup \{\beta\}$ w 1.
- Na mocy definicji wartościowań: albo $v(\beta_1) = 1$ albo $v(\beta_2) = 1$.
- W konsekwencji, wartościowanie v posyła w 1: albo wszystkie elementy zbioru $W_0 \cup \{\beta, \beta_1\}$ albo wszystkie elementy zbioru $W_0 \cup \{\beta, \beta_2\}$. Tak więc: albo $W_0 \cup \{\beta, \beta_1\}$ albo $W_0 \cup \{\beta, \beta_2\}$ jest spełnialny.
- Ponieważ podzbiór zbioru spełnialnego jest spełnialny, więc: albo $W_0 \cup \{\beta_1\}$ albo $W_0 \cup \{\beta_2\}$ jest spełnialny.
- Ostatecznie: albo $W \cup \{\beta_1\} \in \mathcal{C}$ albo $W \cup \{\beta_2\} \in \mathcal{C}$.

Operacje i relacje konsekwencji w sensie Tarskiego

Ogólna *operacja konsekwencji* C w ustalonym języku o zbiorze formuł F to operacja $C : \wp(F) \to \wp(F)$, spełniająca warunki:

(C 1) $X \subseteq C(X)$ (zwrotność)

(C 2) Jeśli $X \subseteq Y$, to $C(X) \subseteq C(Y)$ (monotoniczność)

(C 3) $C(C(X)) \subseteq C(X)$ (idempotencja)

(C 4) $C(X) \subseteq \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).

Ogólna *relacja konsekwencji* $\vdash \subseteq \wp(F) \times F$ określona jest przez warunki:

($\vdash$ 1) $X \vdash \psi$ dla każdej $\psi \in X$

($\vdash$ 2) Jeśli $X \vdash \psi$ i $X \subseteq Y$, to $Y \vdash \psi$

($\vdash$ 3) Jeśli $X \vdash \varphi$ dla każdej $\varphi \in Y$ oraz $Y \vdash \psi$, to $X \vdash \psi$

($\vdash$ 4) Jeśli $X \vdash \psi$, to istnieje Y taki, że: $Y \subseteq X$, $\overline{\overline{Y}} < \aleph_0$ oraz $Y \vdash \psi$.

Relacje konsekwencji w sensie Scotta

Relacją konsekwencji w sensie Scotta w ustalonym języku nazywamy relację $\vdash$ między zbiorami formuł tego języka, która spełnia następujące warunki:

- *Zwrotność*. $\{\varphi\} \vdash \{\varphi\}$
- *Monotoniczność*. Jeśli $X_1 \subseteq X_2$, $Y_1 \subseteq Y_2$ oraz $X_1 \vdash Y_1$, to $X_2 \vdash Y_2$
- *Przechodniość*. Jeśli $X \vdash Y \cup \{\varphi\}$ oraz $\{\varphi\} \cup X \vdash Y$, to $X \vdash Y$.

- Uwaga. O ogólnych operacjach i relacjach konsekwencji jedynie wspominamy w tym miejscu. Każda z omawianych dalej metod dowodowych wyznacza takie operacje i relacje.
- Celem tego wykładu jest jednak nie badanie (ciekawych!) własności ogólnych operacji i relacji konsekwencji, ale praktyczne oswojenie się z wybranymi metodami dowodowymi.

Wreszcie! Reguły.

Niech $\mathcal{R}$ będzie dowolną rodziną reguł wnioskowania w ustalonym języku o zbiorze formuł F. Przez *operację konsekwencji w tym języku wyznaczoną przez* $\mathcal{R}$ rozumiemy każdą funkcję $C_{\mathcal{R}} : \wp(F) \to \wp(F)$, zdefiniowaną indukcyjnie następującymi warunkami dla dowolnego zbioru formuł X tego języka:

$C^0_{\mathcal{R}}(X) = X$

$C^{k+1}_{\mathcal{R}}(X) = C^k_{\mathcal{R}}(X) \cup \{\psi \in F : (\exists R \in \mathcal{R})(\exists P \subseteq C^k_{\mathcal{R}}(X))\ (P, \psi) \in R\}$

$C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C^k_{\mathcal{R}}(X) : k \in \mathbb{N}\}$.

Wyrażenie $\psi \in C_{\mathcal{R}}(X)$ czytamy: ψ jest wyprowadzalna z X za pomocą reguł należących do $\mathcal{R}$. Oczywiście jeśli $n < m$, to $C^n_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C^m_{\mathcal{R}}(X)$.

Niech $Cld(\mathcal{R}, X)$ oznacza, że zbiór formuł X jest *domknięty na wszystkie reguły ze zbioru* $\mathcal{R}$: $Cld(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall R \in \mathcal{R})(\forall P \subseteq F)(\forall \psi \in F)(((P, \psi) \in R \wedge P \subseteq X) \to \psi \in X)$.

Nie powinnaś być zaskoczona, że:

1. $\psi \in C_{\mathcal{R}}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi \in Y$ dla każdego zbioru Y takiego, że $X \subseteq Y$ oraz $Cld(\mathcal{R}, Y)$.
2. Jeśli $((P, \psi) \in R \wedge R \in \mathcal{R})$, to $\psi \in C_{\mathcal{R}}(P)$.
3. Jeśli $((P, \psi) \in R \wedge R \in \mathcal{R} \wedge P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X))$, to $\psi \in C_{\mathcal{R}}(X)$.
4. $X \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$ (zwrotność).
5. Jeśli $X \subseteq Y$, to $C_{\mathcal{R}}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}}(Y)$ (monotoniczność).
6. Jeśli $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, to $C_{\mathcal{R}_1}(X) \subseteq C_{\mathcal{R}_2}(X)$ (monotoniczność).
7. $C_{\mathcal{R}}(C_{\mathcal{R}}(X)) = C_{\mathcal{R}}(X)$ (idempotencja).
8. $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}}(Y) : Y \subseteq X \wedge \overline{\overline{Y}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).
9. $C_{\mathcal{R}}(X) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}'}(X) : \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R} \wedge \overline{\overline{\mathcal{R}'}} < \aleph_0\}$ (finitystyczność).
10. Niech $\mathcal{X} \neq \emptyset$ oraz $X \subseteq Y$ lub $Y \subseteq X$ dla $X, Y \in \mathcal{X}$. Wtedy $C_{\mathcal{R}}(\bigcup\{X : X \in \mathcal{X}\}) = \bigcup\{C_{\mathcal{R}}(X) : X \in \mathcal{X}\}$.

Co wolno

Zbiór $Adm(\mathcal{R}, X)$ wszystkich reguł *dopuszczalnych* ze względu na X i $\mathcal{R}$ definiujemy następująco:
$R \in Adm(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq F$ oraz każdej $\psi \in F$: jeśli $(P, \psi) \in R$ i $P \subseteq C_{\mathcal{R}}(X)$, to $\psi \in C_{\mathcal{R}}(X)$.

Zbiór $Der(\mathcal{R}, X)$ wszystkich reguł *wyprowadzalnych* ze względu na X i $\mathcal{R}$ definiujemy następująco:
$R \in Der(\mathcal{R}, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \subseteq F$ oraz każdej $\psi \in F$: jeśli $(P, \psi) \in R$, to $\psi \in C_{\mathcal{R}}(X \cup P)$.

- Reguła R jest zatem dopuszczalna ze względu na X oraz $\mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $C_{\mathcal{R}}(X)$ jest domknięty na tę regułę.
- $Der(\mathcal{R}, X) \subseteq Adm(\mathcal{R}, X)$.

Chińskie mundurki

Niech $e : V \to X$ będzie odwzorowaniem ze zbioru V zmiennych zdaniowych w zbiór formuł X. Funkcję e można jednoznacznie rozszerzyć do $h^e : F \to F$ w następujący sposób:
$h^e(p_i) = e(p_i)$
$h^e(\S^1_j(\varphi)) = \S^1_j(h^e(\varphi))$ (dla spójników 1-argumentowych $\S^1_j$)
$h^e(\S^2_j(\varphi, \psi)) = \S^2_j(h^e(\varphi), h^e(\psi))$ (dla spójników 2-argumentowych $\S^2_j$).
Reguła *podstawiania za zmienne zdaniowe*: ψ powstaje z φ przez podstawienie (formuł ze zbioru X za zmienne zdaniowe) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $e : V \to X$ taka, że $\psi = h^e(\varphi)$.

Reguła R jest regułą *strukturalną* w F wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary $(P, \psi) \in R$ oraz każdego $e : V \to F$ mamy $(h^e[P], h^e(\psi)) \in R$. Reguła strukturalna to zatem, intuicyjnie mówiąc, reguła zawierająca wszelkie pary (P, ψ) będące podstawieniami jakiegokolwiek pary z tej reguły.

Drobinka semantyki

Niech $\mathfrak{M} = \langle U, \{f_i\}_{i\in I}, D\rangle$ będzie matrycą logiczną, gdzie $\langle U, \{f_i\}_{i\in I}\rangle$ jest algebrą podobną do algebry języka $J = \langle V, \{\S_i : i \in I\}, F\rangle$, a D jest podzbiorem U (zbiorem wartości wyróżnionych matrycy $\mathfrak{M}$).
Zawartością (zbiorem *tautologii*) matrycy $\mathfrak{M}$ jest zbiór $E(\mathfrak{M})$ wszystkich formuł ψ języka J takich, że dla dowolnego $v : V \to U$ mamy $h^v(\psi) \in D$.

Zdefiniujmy funkcję $C_{\mathfrak{M}} : \wp(F) \to \wp(F)$ następująco:

- $C_{\mathfrak{M}}(X)$ jest zbiorem wszystkich formuł $\psi \in F$ takich, że dowolnego $v : V \to U$ mamy: jeśli $h^v[X] \subseteq D$, to $h^v(\psi) \in D$.

Wtedy funkcja $C_{\mathfrak{M}}$ spełnia warunki (C 1)–(C 4). Funkcję $C_{\mathfrak{M}}$ nazywamy *konsekwencją matrycową* (wyznaczoną przez matrycę $\mathfrak{M}$).

W tych wykładach zajmujemy się syntaktycznymi metodami dowodzenia. Zachowamy jednak czujność semantyczną.

Co ujrzała Alicja

Niech C będzie operacją konsekwencji. Zdefiniujmy operację C^{-1} konsekwencji *odrzucającej* (wyznaczonej przez C) następująco: $C^{-1}(X) = \{\psi \in F : X \cap C(\{\psi\}) \neq \emptyset\}$.
Wtedy C^{-1} spełnia warunki (C1)–(C4).
W myśl powyższej definicji, ψ jest formułą odrzuconą na gruncie założeń X wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna formuła z X jest wyprowadzalna z $\{\psi\}$.
Tak więc, formuła ψ *nie jest* odrzucona na gruncie założeń X wtedy i tylko wtedy, gdy *żadna* formuła z X nie jest wyprowadzalna z $\{\psi\}$.

Konsekwencje odrzucające możemy charakteryzować poprzez *reguły odrzucania* formuł. Dla przykładu, jedną z takich reguł jest *reguła odrzucania przez odrywanie:* jeśli *uznajesz* implikację oraz *odrzucasz* jej następnik, to *odrzuć* jej poprzednik.

Kraty

Definicja algebraiczna.
Układ $(A, \cap, \cup)$ nazywamy *kratą*, jeśli $\cap$ oraz $\cup$ są dwuargumentowymi operacjami na zbiorze A, spełniającymi następujące warunki:

$$\begin{array}{ll} x \cup y = y \cup x & x \cap y = y \cap x \\ x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z & x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cup z \\ (x \cap y) \cup x = x & x \cap (x \cup y) = x \end{array}$$

Definicja porządkowa.
Częściowy porządek $\leqslant$ nazywamy porządkiem *kratowym* w zbiorze A, jeśli dla każdych $x, y \in A$ w zbiorze A istnieją kresy: $\inf\{x, y\}$ oraz $\sup\{x, y\}$. Jeśli $\leqslant$ jest porządkiem kratowym w A, to $(A, \leqslant)$ nazywamy *kratą*.

Definicje te są równoważne:
$\inf\{x, y\} = x \cap y$, $\sup\{x, y\} = x \cup y$, $x \leqslant y$ wttw $x \cap y = x$ wttw $x \cup y = y$

Kraty dystrybutywne

- Największy element kraty (o ile istnieje), nazywamy *jedynką* kraty i oznaczamy np. przez $\mathbf{1}$.
- Najmniejszy element kraty (o ile istnieje), nazywamy *zerem* kraty i oznaczamy np. przez $\mathbf{0}$.

Krata $(A, \cap, \cup)$ jest:

- *modularna*, gdy dla wszystkich x, y, z: jeśli $x \leqslant y$, to $x \cup (y \cap z) = y \cap (x \cup z)$
- *dystrybutywna*, gdy dla wszystkich x, y, z:

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$$

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z).$$

Algebry Heytinga

Mówimy, że krata $(A, \cap, \cup)$ jest *implikatywna*, gdy dla każdych $x, y \in A$ istnieje $u \in A$ taki, że dla każdego $v \in A$: $v \leqslant u$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \cap v \leqslant y$.
Element ten oznaczany jest np. symbolem $x \Rightarrow y$. Wprost z definicji widać, że $x \Rightarrow y$ jest elementem największym w zbiorze $\{z \in A : x \cap z \leqslant y\}$.
Element $x \Rightarrow y$ nazywany jest *pseudouzupełnieniem* x *względem* y.

Kratę implikatywną, w której istnieje zero $\mathbf{0}$ nazywamy *kratą Heytinga* (albo *algebrą Heytinga*, albo *algebrą pseudoboole'owską*).
W każdej kracie Heytinga zdefiniować można *pseudouzupełnienie* dowolnego elementu x, oznaczane np. symbolem $-x$, w następujący sposób: $-x = x \Rightarrow \mathbf{0}$.

Algebry Heytinga

Prosty przykład algebry Heytinga podają poniższe tabelki określające wartości operacji $\cap$, $\cup$ oraz $\Rightarrow$ w trójelementowym zbiorze liniowo uporządkowanym $\{\mathbf{0}, a, \mathbf{1}\}$ $(\mathbf{0} \leqslant a \leqslant \mathbf{1})$:

$\cap$	$\mathbf{0}$	a	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
a	$\mathbf{0}$	a	a
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	a	$\mathbf{1}$

$\cup$	$\mathbf{0}$	a	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	a	$\mathbf{1}$
a	a	a	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$

$\Rightarrow$	$\mathbf{0}$	a	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
a	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	a	$\mathbf{1}$

x	$-x$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
a	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

Z tabelek tych widać, że $-x = \mathbf{0}$ dla wszystkich $x \neq \mathbf{0}$. Zauważmy też, że w algebrze tej nie zachodzi np.: $x \cup -x = \mathbf{1}$, ponieważ $a \cup -a = a \cup (a \Rightarrow \mathbf{0}) = a \cup \mathbf{0} = a \neq \mathbf{1}$. Ponadto, w algebrze tej nie zachodzi np. prawo Peirce'a: element $((x \Rightarrow y) \Rightarrow x) \Rightarrow x$ nie musi być równy $\mathbf{1}$.

Krata Riegera-Nishimury

Wolna algebra Heytinga o jednym generatorze (zjedzona w Krakowie).

Algebry Boole'a

Mówimy, że krata $(A, \cap, \cup)$ jest *komplementarna*, gdy ma ona elementy $\mathbf{0}$ oraz $\mathbf{1}$ i gdy dla dowolnego $x \in A$ istnieje $y \in A$ taki, że: $x \cap y = \mathbf{0}$ oraz $x \cup y = \mathbf{1}$. W każdej dystrybutywnej kracie komplementarnej dla każdego elementu x istnieje dokładnie jeden element y, spełniający te warunki: nazywamy go *uzupełnieniem* elementu x i oznaczamy $-x$.

Można na kilka sposobów definiować algebry Boole'a. *Algebrą Boole'a* nazywamy każdą implikatywną kratę komplementarną. Można też zdefiniować *algebrę Boole'a* jako kratę $(A, \cup, \cap, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, gdzie:

- $(A, \cup, \cap)$ jest kratą dystrybutywną
- $x \cup \mathbf{0} = x$, $x \cap \mathbf{1} = x$, $x \cup -x = \mathbf{1}$, $x \cap -x = \mathbf{0}$.

W myśl tej definicji, algebra Boole'a to krata dystrybutywna z zerem i jedynką, w której każdy element ma uzupełnienie.

Algebry Boole'a

Słuchacze z pewnością znają co najmniej dwa przykłady algebr Boole'a:

- Dwuelementowa algebra wartości logicznych.
- Algebra wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru.

- Każda algebra Boole'a jest izomorficzna z pewnym ciałem zbiorów.
- Algebry Heytinga związane są z logiką intuicjonistyczną.
- Logiki modalne związane są z algebrami Boole'a z dodatkowymi operacjami.

W trakcie wykładów będziemy sporadycznie korzystać z podanych pojęć algebraicznych (a także dalszych, jak np.: filtr, kongruencja, algebra ilorazowa).