DWA PRZYKŁADY

1 Przykład 1

Czy jest tautologią formuła:

$$(\bigstar) \quad ([(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s)] \wedge [(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s)] \wedge [\neg p \wedge \neg q]) \rightarrow (s \rightarrow r)$$

Rozwiązanie siłowe:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	q	r	s	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg s$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$r \wedge \neg s$	$\neg r \wedge s$
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Druga część tabelki prawdziwościowej dla ($\bigstar$):

1	2	3	4	13	14	15	16	17	18
p	q	r	s	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg s)$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg r \wedge s)$	$13 \wedge 14 \wedge 15$	$s \rightarrow r$	$(\bigstar)$
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	0	1	1

Z ostatniej kolumny widać, że dla wzz w takiego, że $Val(p,w) = 0$, $Val(q,w) = 0$, $Val(r,w) = 0$ oraz $Val(s,w) = 1$ formuła ($\bigstar$) przyjmuje wartość 0. Nie jest więc tautologią. Przy podanej kolejności branych pod uwagę wartościowań odpowiedź uzyskujesz już dla drugiego wartościowania. Gdybyś przyjęła odwrotną do podanej kolejność, to odpowiedź uzyskasz dla piętnastego wartościowania, czyli po wykonaniu ponad dwustu obliczeń. Zauważ, że rozważano tu trójczłonową koniunkcję, wykorzystując *łączność* koniunkcji.

2 Przykład 2

Czy jest tautologią formuła: $(p \wedge \neg(q \to p)) \to r$?

2.1 Rozwiązanie metodą siłową:

p	q	r	$q \to p$	$\neg(q \to p)$	$p \wedge \neg(q \to p)$	$(p \wedge \neg(q \to p)) \to r$
1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1

Formuła ma wartość 1 dla każdego wzz, a więc jest tautologią.

2.2 Sprytne rozwiązanie pierwszego rodzaju:

Przypuśćmy, że istnieje wzz, dla którego ta formuła ma wartość 0. Wtedy:

$$\begin{array}{cccccccc} (p & \wedge & \neg & (q & \to & p)) & \to & r \\ 1_3 & 1_2 & 1_3 & 1_5 & 0_4 & 0_5 & 0_1 & 0_2 \end{array}$$

Przypuszczenie 0_1 doprowadziło do wzajem niezgodnych wyników: 1_3 oraz 0_5, a więc musimy je odrzucić. Nie istnieje wzz, dla którego ta formuła przyjmuje wartość 0, a zatem przy każdym wzz przyjmuje ona wartość 1, czyli jest tautologią.

2.3 Sprytne rozwiązanie drugiego rodzaju:

Dla dowolnego wzz, koniunkcja w poprzedniku badanej implikacji nie może mieć wartości 1 przy tym wzz, ponieważ dla takiego wzz p miałaby wartość 1, a implikacja $p \to q$ miałaby wartość 0, czyli q miałaby wartość 1, a p miałaby wartość 0. Tak jednak być nie może: p nie może mieć (jednocześnie!) wartości 0 i 1 przy ustalonym wzz. Tak więc, poprzednik tej implikacji ma wartość 0 przy *każdym* wzz. Implikacja, której poprzednik ma wartość 0, sama ma wartość 1, niezależnie od wartości jej następnika. Ponieważ dla dowolnego wzz nasza formuła jest implikacją o poprzedniku 0 (przy tym wzz), więc jest tautologią.

3 Odlot: powrót do przykładu 1

Uważam, że będziesz miała pyszną zabawę, znajdując sprytne rozwiązanie (pierwszego rodzaju) dla formuły z przykładu 1. Nie zamierzam psuć ci tej zabawy, podając gotowe rozwiązanie. Spróbuj sama.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl