Metalogika

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

Twierdzenia metalogiczne

Plan wykładu

W tym wykładzie podamy kilka ważnych twierdzeń metalogicznych, wraz z dowodami.

- Twierdzenie Gödla o niezupełności PA.
- Twierdzenie Rossera o niezupełności PA.
- Twierdzenie Gödla o niedowodliwości niesprzeczności PA w PA.
- Twierdzenie Löba.
- Twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności w PA pojęcia prawdy arytmetycznej.

Dowody tych twierdzeń w istotny sposób wykorzystują procedurę arytmetyzacji składni opisaną w poprzednim wykładzie.

Teorie rekurencyjnie aksjomatyzowalne

- Procedurę arytmetyzacji składni można przeprowadzić dla dowolnej teorii pierwszego rzędu, której zbiór numerów gödlowskich symboli pozalogicznych jest rekurencyjny.
- Jeśli jednak zbiór numerów gödlowskich aksjomatów pozalogicznych teorii T nie jest rekurencyjny, to relacja $Dow_T(a, b)$ (czytaj: a jest numerem gödlowskim dowodu w teorii T formuły o numerze gödlowskim b) nie musi być rekurencyjna. W konsekwencji, w takim przypadku zbiór numerów gödlowskich twierdzeń teorii T nie musi być rekurencyjnie przeliczalny.

- Mówimy, że teoria T jest ***(rekurencyjnie) aksjomatyzowalna***, gdy zbiór numerów gödlowskich aksjomatów teorii T jest rekurencyjny.
- Arytmetyka PA jest rekurencyjnie aksjomatyzowalna.

Zupełność i rozstrzygalność

Niech T będzie teorią pierwszego rzędu, której zbiór numerów gödlowskich symboli pozalogicznych jest rekurencyjny. Mówimy, że T jest:

- ***zupełna***, gdy dla dowolnego zdania ψ jej języka: albo $T \vdash \psi$, albo $T \vdash \neg\psi$; w przeciwnym przypadku T nazywamy ***niezupełną***.
- ***rozstrzygalna***, gdy zbiór numerów gödlowskich jej twierdzeń jest rekurencyjny; w przeciwnym przypadku T nazywamy ***nierozstrzygalną***.

- Teoria T jest zatem zupełna, gdy dla dowolnego pytania rozstrzygnięcia sformułowanego w jej języku: albo odpowiedź TAK, albo odpowiedź NIE na to pytanie jest dowodliwa w T.
- Teoria T jest rozstrzygalna, gdy istnieje obliczalna metoda pozwalająca rozstrzygać o dowolnej formule jej języka czy jest ona twierdzeniem T czy nie jest [zakładamy tu Tezę Churcha: obliczalne=rekurencyjne].

ω-niesprzeczność

Niech T będzie teorią (pierwszego rzędu), w której języku mamy liczebniki (nazwy liczb naturalnych). Jak zwykle, $T \vdash \psi$ oznacza, że istnieje dowód formuły ψ w teorii T. Piszemy T *non* $\vdash \psi$, gdy nie zachodzi $T \vdash \psi$.

- Mówimy, że teoria T jest ω-***niesprzeczna***, gdy dla każdej formuły $\psi(x)$: jeśli $T \vdash \psi(\underline{0})$, $T \vdash \psi(\overline{1})$, $T \vdash \psi(\overline{2})$, ..., $T \vdash \psi(\overline{n})$,..., to T *non* $\vdash \exists x \, \neg\psi(x)$.

- **Twierdzenie**. Jeśli PA jest ω-niesprzeczna, to jest niesprzeczna.
- **Zarys dowodu**. Wystarczy znaleźć choć jedną formułę, która nie jest twierdzeniem PA. Mamy: $PA \vdash x \doteq x \rightarrow x \doteq x$, a zatem $PA \vdash \overline{n} \doteq \overline{n} \rightarrow \overline{n} \doteq \overline{n}$ dla wszystkich n. Z założenia o ω-niesprzeczności mamy: PA *non* $\vdash \exists x \, \neg(x \doteq x \rightarrow x \doteq x)$.

Konstrukcja zdania Gödla

Funkcję num określamy przez schemat rekursji prostej:

- $\mathrm{num}(0) = \langle sn(\underline{0})\rangle$
- $\mathrm{num}(a+1) = \langle sn(\underline{s}), \mathrm{num}(a)\rangle$.

Wtedy $\mathrm{num}(n)$ jest numerem gödlowskim liczebnika $\overline{n}$. Funkcja num jest rekurencyjna. Przypominamy, że $\langle\ \rangle$ jest tu funkcją kodowania ciągów zdefiniowaną w poprzednim wykładzie.

Nie zagub się! Należy odróżniać:

- liczbę naturalną n
- liczebnik $\overline{n}$
- numer gödlowski $\mathrm{num}(n)$ liczebnika $\overline{n}$.

Konstrukcja zdania Gödla

Niech sam będzie dwuargumentową relacją zdefiniowaną następująco:
$\mathrm{sam}(a, b) \equiv \mathrm{Form}(a) \wedge \mathrm{Fr}(a, 2) \wedge \mathrm{Dow}(b, \mathrm{Sub}(a, 2, \mathrm{num}(a)))$.

- Jeśli a jest numerem gödlowskim formuły, powiedzmy, $\psi(x_1)$, to $\mathrm{Sub}(a, 2, \mathrm{num}(a))$ jest numerem gödlowskim formuły, która powstaje z formuły $\psi(x_1)$ poprzez wstawienie za zmienną x_1 liczebnika nazywającego liczbę a, czyli nazywającego właśnie numer gödlowski samej formuły ψ.
- Tak więc, rekurencyjna (!) relacja sam zachodzi między liczbami a oraz b dokładnie wtedy, gdy:
  - a jest numerem gödlowskim formuły o zmiennej wolnej x_1,
  - b jest numerem gödlowskim dowodu formuły o numerze gödlowskim $\mathrm{Sub}(a, 2, \mathrm{num}(a))$, czyli formuły otrzymanej z formuły o numerze gödlowskim a w wyżej podany sposób.

Konstrukcja zdania Gödla

Komentarz dydaktyczny. Mamy formułę, powiedzmy, $\psi(x_1)$ o jednej zmiennej wolnej x_1 (wybór tej właśnie zmiennej jest nieistotny).

- Formuła ta ma swój numer gödlowski, powiedzmy, a, czyli $\ulcorner\psi(x_1)\urcorner = a$.
- Liczba $\mathrm{num}(a)$ jest numerem gödlowskim liczebnika $\overline{a}$.
- Do formuły $\psi(x_1)$ chcemy wstawić, w miejsce zmiennej wolnej x_1 term $\overline{a}$, czyli chcemy otrzymać formułę $\psi(\overline{a})$, która (na mocy definicji liczby a) jest formułą $\psi(\overline{\ulcorner\psi(x_1)\urcorner})$.
- Liczba $\mathrm{Sub}(a, 2, \mathrm{num}(a))$ jest właśnie numerem gödlowskim otrzymanej w ten sposób formuły: $\mathrm{Sub}(a, 2, \mathrm{num}(a)) = \ulcorner\psi(\overline{\ulcorner\psi(x_1)\urcorner})\urcorner$.

- Pamiętaj: do formuły podstawiamy (w miejsce zmiennej wolnej) term. W szczególności, term ten może być liczebnikiem.

Konstrukcja zdania Gödla

Ponieważ sam jest relacją rekurencyjną, więc (na mocy twierdzenia o reprezentowalności) istnieje co najmniej jedna formuła języka PA, która mocno reprezentuje tę relację. Niech $\underline{\mathrm{sam}}(x, y)$ będzie taką formułą.

- Rozważmy formułę o postaci: $\forall y \neg \underline{\mathrm{sam}}(x, y)$.
- Niech $m = \ulcorner \forall y \neg \underline{\mathrm{sam}}(x, y) \urcorner$, czyli niech m będzie numerem gödlowskim formuły $\forall y \neg \underline{\mathrm{sam}}(x, y)$.
- Niech *god* będzie zdaniem: $\forall y \neg \underline{\mathrm{sam}}(\overline{m}, y)$.
- Zdanie *god* nazywamy ***zdaniem Gödla***.
- Zdanie *god* stwierdza zatem, że formuła o numerze gödlowskim m nie ma dowodu w PA.
- Ponieważ m jest numerem gödlowskim formuły $\forall y \neg \underline{\mathrm{sam}}(x, y)$, więc zdanie Gödla *god* stwierdza, że zdanie *god* nie jest twierdzeniem PA, czyli głosi ono samo o sobie: „nie jestem twierdzeniem PA."

I Twierdzenie Gödla (o niezupełności PA)

I Twierdzenie Gödla (o niezupełności PA)

Jeśli PA jest ω-niesprzeczna, to ani zdanie god, ani zdanie $\neg$ god nie ma dowodu w PA:

1. *PA non $\vdash$ god*
2. *PA non $\vdash \neg$ god.*

Tak więc, PA jest niezupełna.

- Zauważmy, że jedno ze zdań: *god*, $\neg$ *god* musi być prawdziwe w modelu standardowym $\mathfrak{N}_0$. Zobaczymy, że $\mathfrak{N}_0 \models god$.
- Dla dowodu *PA non $\vdash$ god* wystarczy założenie niesprzeczności PA; dowód *PA non $\vdash \neg$ god* wymaga silniejszego założenia ω-niesprzeczności.

Dowód I Twierdzenia Gödla

PA non $\vdash$ *god*.

- Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $PA \vdash god$, czyli że *god* ma dowód w PA.
- Niech k będzie numerem gödlowskim jakiegoś dowodu zdania *god* (pamiętamy, że dowody, jako ciągi formuł, też mają numery gödlowskie).
- Zachodzi zatem $\mathrm{sam}(m, k)$. Ponieważ $\underline{\mathrm{sam}}$ mocno reprezentuje relację sam, więc $PA \vdash \underline{\mathrm{sam}}(\overline{m}, \overline{k})$.
- Skoro $PA \vdash god$, czyli $PA \vdash \forall y \neg \underline{\mathrm{sam}}(\overline{m}, y)$, to $PA \vdash \neg \underline{\mathrm{sam}}(\overline{m}, \overline{k})$.
- Skoro $PA \vdash \underline{\mathrm{sam}}(\overline{m}, \overline{k})$ oraz $PA \vdash \neg \underline{\mathrm{sam}}(\overline{m}, \overline{k})$, to PA jest sprzeczna, wbrew założeniu (bo zakładamy, że PA jest nawet ω-niesprzeczna).
- Przypuszczenie dowodu nie wprost trzeba zatem odrzucić. Ostatecznie, *PA non* $\vdash$ *god*.

Dowód I Twierdzenia Gödla

PA *non* $\vdash \neg \, god$.

- Pokazaliśmy, że PA *non* $\vdash god$, a więc nie istnieje liczba naturalna n, która byłaby numerem gödlowskim dowodu god w PA.
- Dla każdej n: **nie** zachodzi zatem $\mathrm{sam}(m, n)$.
- Ponieważ $\underline{\mathrm{sam}}$ mocno reprezentuje relację sam, więc dla wszystkich n mamy: $PA \vdash \neg \, \underline{\mathrm{sam}}(\overline{m}, \overline{n})$.
- Na mocy ω-niesprzeczności PA mamy: PA *non* $\vdash \exists y \, \neg\neg \, \underline{\mathrm{sam}}(\overline{m}, y)$, co jest równoważne temu, iż PA *non* $\vdash \neg \forall y \, \neg \, \underline{\mathrm{sam}}(\overline{m}, y)$.
- Ponieważ $\neg \forall y \, \neg \, \underline{\mathrm{sam}}(\overline{m}, y)$ jest formułą $\neg \, god$, więc PA *non* $\vdash \neg \, god$.

Dowód całego twierdzenia został tym samym zakończony.

I Twierdzenie Gödla: komentarz

- Zdanie Gödla *god* jest formułą generalnie skwantyfikowaną: $\forall y \neg \underline{\mathrm{sam}}(\overline{m}, y)$.
- Ponieważ:
  - *PA non* $\vdash$ *god* oraz
  - $\underline{\mathrm{sam}}$ mocno reprezentuje w PA relację sam,

  więc dla każdej liczby naturalnej n mamy: $PA \vdash \neg \underline{\mathrm{sam}}(\overline{m}, \overline{n})$.
- Tak więc, choć samo (generalnie skwantyfikowane) zdanie Gödla jest nierozstrzygalne w PA, to wszystkie jego szczególne przypadki (gdy pomijamy kwantyfikator generalny i wstawiamy liczebnik za zmienną) są twierdzeniami PA.

- Założenie ω-niesprzeczności można osłabić do zwykłej niesprzeczności, jak za chwilę zobaczymy.

Konstrukcja zdania Rossera

Zdefiniujmy dwuargumentową relacje rekurencyjną samneg:

$\mathsf{samneg}(a, b) \equiv \mathsf{Form}(a) \wedge \mathsf{Fr}(a, 2) \wedge \mathsf{Dow}(b, \mathsf{Sub}(\langle 3, a\rangle, 2, \mathsf{num}(a)))$.

- Relacja samneg zachodzi zatem między liczbami a oraz b dokładnie wtedy, gdy a jest numerem gödlowskim pewnej formuły, powiedzmy, $\psi(x_1)$ o zmiennej wolnej x_1, natomiast b jest numerem gödlowskim dowodu formuły otrzymanej przez podstawienie w formule $\neg\psi(x_1)$ za zmienną x_1 liczebnika nazywającego liczbę a, czyli numer gödlowski samej formuły $\psi(x_1)$.

- Relacja samneg jest rekurencyjna, a zatem istnieje co najmniej jedna formuła języka PA, która ją mocno reprezentuje. Niech $\underline{\mathsf{samneg}}$ będzie taką formułą.
- Jak poprzednio, niech formuła $\underline{\mathsf{sam}}$ mocno reprezentuje relację sam.

Konstrukcja zdania Rossera

- Rozważmy formułę: $\forall y\, (\underline{\mathrm{sam}}(x, y) \rightarrow \exists z\, (z \underline{\leqslant} y \wedge \underline{\mathrm{samneg}}(x, z)))$. Tu $\underline{\leqslant}$ jest predykatem o denotacji $\leqslant$.
- Niech n będzie numerem gödlowskim tej formuły, czyli: $n = \ulcorner \forall y\, (\underline{\mathrm{sam}}(x, y) \rightarrow \exists z\, (z \underline{\leqslant} y \wedge \underline{\mathrm{samneg}}(x, z))) \urcorner$.
- Niech *ros* będzie zdaniem: $\forall y\, (\underline{\mathrm{sam}}(\overline{n}, y) \rightarrow \exists z\, (z \underline{\leqslant} y \wedge \underline{\mathrm{samneg}}(\overline{n}, z)))$.
- Zdanie *ros* nazwiemy ***zdaniem Rossera***.

Dla każdej liczby naturalnej y mamy:

- $(\dagger)$ sam(n, y) dokładnie wtedy, gdy y jest numerem gödlowskim dowodu w PA zdania *ros*
- $(\ddagger)$ samneg(n, y) dokładnie wtedy, gdy y jest numerem gödlowskim dowodu w PA zdania $\neg$ *ros*.

Twierdzenie Rossera

- Zdanie Rossera *ros* stwierdza zatem, że jeśli istnieje w PA dowód zdania *ros*, to istnieje w PA również dowód (o niewiększym numerze gödlowskim) zdania $\neg$ *ros*.
- Zdanie *ros* stwierdza więc, że jeśli ono samo jest twierdzeniem PA, to twierdzeniem PA jest także jego negacja.

Twierdzenie Rossera.

Jeśli PA jest niesprzeczna, to ani zdanie ros, ani zdanie $\neg$ ros nie ma dowodu w PA:

1. *PA non $\vdash$ ros*
2. *PA non $\vdash \neg$ ros.*

Tak więc, PA jest niezupełna.

Dowód Twierdzenia Rossera

1. PA *non* $\vdash$ *ros*

- Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że $PA \vdash ros$ i niech k będzie numerem gödlowskim jakiegoś dowodu *ros* w PA.
- Wtedy (na mocy (†)) sam(n, k), a więc $PA \vdash \underline{\mathrm{sam}}(\overline{n}, \overline{k})$.
- Na mocy przypuszczenia dowodu nie wprost mamy: $PA \vdash \underline{\mathrm{sam}}(\overline{n}, \overline{k}) \rightarrow \exists z\ (z \underline{\leqslant} \overline{k} \wedge \underline{\mathrm{samneg}}(\overline{n}, z))$.
- Na mocy reguły odrywania mamy: $(*)$ $PA \vdash \exists z\ (z \underline{\leqslant} \overline{k} \wedge \underline{\mathrm{samneg}}(\overline{n}, z))$.
- Na mocy założenia, że PA niesprzeczna: nie istnieje w PA dowód zdania $\neg\, ros$.
- Na mocy (‡), dla każdej y: ***nie*** zachodzi samneg(n, y).
- Ponieważ $\underline{\mathrm{samneg}}$ mocno reprezentuje samneg w PA, więc dla wszystkich i mamy: $PA \vdash \neg\, \underline{\mathrm{samneg}}(\overline{n}, \overline{i})$.

Dowód Twierdzenia Rossera

- W szczególności:
  $PA \vdash \neg \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, \underline{0}) \wedge \neg \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, \overline{1}) \wedge \ldots \wedge \neg \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, \overline{k})$.
- Na mocy faktu podanego w poprzednim wykładzie mamy:
  $PA \vdash (\neg \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, \underline{0}) \wedge \neg \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, \overline{1}) \wedge \ldots \wedge \neg \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, \overline{k})) \rightarrow \forall z\, (z \underline{\leqslant} \overline{k} \rightarrow \neg \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, z))$.
- Na mocy reguły odrywania mamy:
  $(**)\quad PA \vdash \forall z\, (z \underline{\leqslant} \overline{k} \rightarrow \neg \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, z))$.
- Skoro zachodzą $(*)$ oraz $(**)$, to PA jest sprzeczna, wbrew założeniu.
- Tak więc, przypuszczenie dowodu nie wprost $PA \vdash ros$ trzeba odrzucić jako fałszywe.
- Ostatecznie, $PA\ non \vdash ros$.

Dowód Twierdzenia Rossera

2. PA *non* $\vdash \neg\, ros$

- Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że $PA \vdash \neg\, ros$ i niech r będzie numerem jakiegoś dowodu $\neg\, ros$ w PA.
- Na mocy (‡) mamy: samneg(n, r), a na mocy mocnej reprezentowalności samneg przez $\underline{\text{samneg}}$ mamy: $PA \vdash \underline{\text{samneg}}(\overline{n}, \overline{r})$.
- Z założenia niesprzeczności PA oraz przypuszczenia dowodu nie wprost mamy: PA *non* $\vdash ros$.
- Tak więc, żadna liczba y nie jest numerem gödlowskim dowodu zdania *ros*, co oznacza, że dla każdej y: ***nie*** zachodzi sam(n, y).
- W konsekwencji, $PA \vdash \neg\, \underline{\text{sam}}(\overline{n}, \overline{i})$, dla wszystkich i.
- Mamy więc: $PA \vdash \neg\, \underline{\text{sam}}(\overline{n}, \underline{0}) \wedge \neg\, \underline{\text{sam}}(\overline{n}, \overline{1}) \wedge \ldots \wedge \neg\, \underline{\text{sam}}(\overline{n}, \overline{r})$.

Dowód Twierdzenia Rossera

- Tak samo jak w dowodzie punktu 1 otrzymujemy stąd: $PA \vdash y \underline{\leqslant} \overline{r} \rightarrow \neg\, \underline{\mathrm{sam}}(\overline{n}, y)$.
- Skoro $PA \vdash \underline{\mathrm{samneg}}(\overline{n}, \overline{r})$, to $PA \vdash \overline{r} \underline{\leqslant} y \rightarrow \exists z\, (z \underline{\leqslant} y \wedge \underline{\mathrm{samneg}}(\overline{n}, z))$.
- Z faktu podanego w poprzednim wykładzie mamy: $PA \vdash y \underline{\leqslant} \overline{r} \vee \overline{r} \underline{\leqslant} y$.
- Z trzech powyższych faktów otrzymujemy: $PA \vdash \neg\, \underline{\mathrm{sam}}(\overline{n}, y) \vee \exists z\, (z \underline{\leqslant} y \wedge \underline{\mathrm{samneg}}(\overline{n}, z))$.
- Na mocy reguły generalizacji mamy: $PA \vdash \forall y\, (\underline{\mathrm{sam}}(\overline{n}, y) \rightarrow \exists z\, (z \underline{\leqslant} y \wedge \underline{\mathrm{samneg}}(\overline{n}, z)))$.
- Otrzymaliśmy więc: $PA \vdash ros$, co (łącznie z przypuszczeniem dowodu nie wprost) przeczy założeniu o niesprzeczności PA.
- Ostatecznie, odrzucamy przypuszczenie dowodu nie wprost i mamy: $PA\ non \vdash \neg\, ros$.

Lemat przekątniowy

- Oba powyższe twierdzenia (oraz szereg dalszych) można udowodnić, odwołując się do pewnego wyniku dotyczącego ***dowodów przekątniowych***.
- W dalszym ciągu tego wykładu przyjmujemy we wszystkich twierdzeniach założenie: ***PA jest niesprzeczna***.

- **Lemat Przekątniowy**. *Dla dowolnej formuły języka PA* $\varphi(x)$ *o jednej zmiennej wolnej istnieje zdanie* ψ *tego języka takie, że:* $PA \vdash \psi \equiv \varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$.

Tak więc, dla każdej własności (liczb) wyrażalnej w PA znajdziemy zdanie ψ stwierdzające, że jego numer gödlowski $\ulcorner\psi\urcorner$ ma tę własność.

Dowód Lematu Przekątniowego

Dowód. Przypomnijmy, że dla termu t, zmiennej x oraz formuły ϕ mamy:

- $\mathrm{Sub}(\ulcorner\phi\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \ulcorner t\urcorner) = \ulcorner\phi(x/t)\urcorner$ (= numer gödlowski formuły otrzymanej przez podstawienie termu t za zmienną x w formule ϕ).
- Niech $\mathrm{Subst}(x, y, z) = \mathrm{Sub}(x, y, \mathrm{num}(z))$.
- Subst jest funkcją rekurencyjną, a więc istnieje co najmniej jedna formuła języka PA, która ją reprezentuje w PA. Niech $\underline{\mathrm{Subst}}(x, y, u, v)$ będzie taką formułą.

- Rozważmy formułę *ref*(x) o postaci: $\forall y\ (\underline{\mathrm{Subst}}(x, \overline{2}, x, y) \to \varphi(y))$.

Dowód Lematu Przekątniowego

- Niech $m = \ulcorner ref(x) \urcorner$.
- Niech ψ będzie zdaniem $ref(\overline{m})$.
- Wtedy w PA można udowodnić równoważność następujących zdań (co daje dowód Lematu Przekątniowego):

- ψ
- $ref(\overline{m})$
- $\forall y\ (\underline{\mathrm{Subst}}(\overline{m}, \overline{2}, \overline{m}, y) \rightarrow \varphi(y))$
- $\forall y\ (\underline{\mathrm{Subst}}(\overline{\ulcorner ref(x) \urcorner}, \overline{2}, \overline{m}, y) \rightarrow \varphi(y))$
- $\varphi(\overline{\ulcorner ref(\overline{m}) \urcorner})$
- $\varphi(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$.

Lemat Przekątniowy: komentarz dydaktyczny

- Istniejące na mocy Lematu Przekątniowego zdanie ψ stwierdza samo o sobie, że (jego numer gödlowski) ma własność φ.
- Precyzyjne sformułowanie tego faktu stało się możliwe dzięki procedurze arytmetyzacji składni.

- Unikamy przy tym wszelkich niebezpieczeństw, które stwarzają zdania samozwrotne w językach etnicznych.

Przypominamy, że np. zdanie:

Zdanie napisane w tej ramce jest fałszywe.

prowadzi do antynomii. Powstaje ona na skutek pomieszania języka przedmiotowego i metajęzyka.

I Twierdzenie Gödla jako konsekwencja LP

- Dla dowolnej formuły ψ języka PA: jeśli $PA \vdash \psi$, to $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\ulcorner \psi \urcorner)$ (implikacja odwrotna nie zachodzi). Tutaj $\underline{\mathrm{Tw}}(y)$ jest formułą $\exists x \underline{\mathrm{Dow}}(x, y)$, gdzie $\underline{\mathrm{Dow}}$ mocno reprezentuje w PA relację Dow.
- Niech φ_G będzie zdaniem takim, że $PA \vdash \varphi_G \equiv \neg \underline{\mathrm{Tw}}(\ulcorner \varphi_G \urcorner)$.
- Zdanie φ_G istnieje na mocy Lematu Przekątniowego.

I Twierdzenie Gödla.

Niech φ_G będzie określonym powyżej zdaniem. Wtedy:

1. *PA non $\vdash \varphi_G$.*
2. *Jeżeli dla dowolnego zdania ψ zachodzi implikacja:*
   $(*)$ jeśli $PA \vdash \underline{Tw}(\ulcorner \psi \urcorner)$, to $PA \vdash \psi$,
   to PA non $\vdash \neg\varphi_G$.

I Twierdzenie Gödla jako konsekwencja LP

Dowód 1.

- Dla dowodu nie wprost punktu 1, przypuśćmy, że $PA \vdash \varphi_G$.
- Wtedy $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$, a stąd $PA \vdash \neg\varphi_G$.
- To oznacza, że PA jest sprzeczna, wbrew założeniu.
- Przypuszczenie $PA \vdash \varphi_G$ trzeba więc odrzucić. Ostatecznie, $PA\ non \vdash \varphi_G$.

Dowód 2.

- Dla dowodu nie wprost punktu 2, przypuśćmy, że $PA \vdash \neg\varphi_G$.
- Wtedy $PA \vdash \neg\neg\, \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$, a stąd $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$.
- Na mocy $(*)$ mamy wtedy $PA \vdash \varphi_G$, wbrew 1.
- Przypuszczenie dowodu nie wprost zatem odrzucamy i mamy ostatecznie $PA\ non \vdash \neg\varphi_G$.

I Twierdzenie Gödla jako konsekwencja LP: komentarz

- Nie zakładano ω-niesprzeczności PA, a tylko jej niesprzeczność oraz warunek $(*)$.
- Z ω-niesprzeczności wynika warunek $(*)$.
- W dowodzie wykorzystywano warunek $(*)$ tylko dla zdania φ_G.
- Zdanie φ_G ma postać: $\neg\exists x\, \underline{Dow}(x, \overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$, jest zatem równoważne zdaniu ogólnemu.
- Pokazaliśmy, że to zdanie jest nierozstrzygalne w PA.
- Można też pokazać, że wszystkie jego instancje (przypadki szczególne) są rozstrzygalne.

Warunki dowodliwości

- Przypomnijmy: relacja Dow jest rekurencyjna, więc istnieje co najmniej jedna formuła języka PA, która ją mocno reprezentuje. Niech $\underline{\mathrm{Dow}}(x, y)$ będzie taką formułą (o dwóch zmiennych wolnych).
- Przypomnijmy: niech $\underline{\mathrm{Tw}}(y)$ będzie formułą $\exists x\, \underline{\mathrm{Dow}}(x, y)$.
- Wtedy dla dowolnej formuły ψ języka PA: jeśli $PA \vdash \psi$, to $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$.

Warunkami dowodliwości nazywamy następujące trzy warunki, dla dowolnych zdań φ i ψ:

- (D1) Jeśli $PA \vdash \varphi$, to $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$.
- (D2) $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \rightarrow \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \urcorner})$.
- (D3) $PA \vdash (\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \wedge \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner})) \rightarrow \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$.

Warunki dowodliwości

- Jak się okazuje, postać formuły mocno reprezentującej relację Tw jest istotna w dowodach niektórych twierdzeń o PA. To samo dotyczy też postaci formuły mocno reprezentującej relację Dow. Nie możemy mocno reprezentować relacji dowodliwości całkiem dowolnie, chcąc otrzymać te twierdzenia.
- Warunki dowodliwości są właśnie pewnymi ograniczeniami nakładanymi na mocną reprezentację relacji dowodliwości w PA.

- Dowodliwość w PA można interpretować jako modalność.
- Otrzymujemy wtedy pewną logikę modalną, ***logikę dowodliwości*** (***logikę Gödla-Löba***).
- Warunki dowodliwości przekładają się na aksjomaty tej logiki.

II Twierdzenie Gödla (niedowodliwość niesprzeczności)

- Jak można ***wyrazić*** w PA niesprzeczność PA? Wystarczy zapisać, że w PA nie można dowieść sprzeczności.
- Przez Con_{PA} rozumiemy formułę: $\neg\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \urcorner})$.
- Wtedy Con_{PA} wyraża niesprzeczność PA.
- Wszystkie zdania sprzeczne są równoważne na gruncie PA.

II Twierdzenie Gödla. *(Niedowodliwość niesprzeczności PA w PA.) Przy założeniach (D1)–(D3): PA non* $\vdash Con_{PA}$.

Pokażemy, że $PA \vdash \varphi_G \equiv Con_{PA}$. Na mocy I Twierdzenia Gödla dostaniemy wtedy: PA *non* $\vdash Con_{PA}$.

Dowód II Twierdzenia Gödla

Dowód.

- Przypominamy, że na mocy Lematu Przekątniowego istnieje zdanie φ_G takie, że $PA \vdash \varphi_G \equiv \neg\, \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$ (czyli zdanie gödlowskie, stwierdzające swoją własną niedowodliwość w PA).
- Ponieważ dla wszystkich ψ mamy: $PA \vdash (\underline{0} \doteq \overline{1} \rightarrow \psi)$, więc $PA \vdash (\underline{0} \doteq \overline{1} \rightarrow \varphi_G)$.
- Na mocy (D1): $PA \vdash\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \rightarrow \varphi_G \urcorner})$.
- Na mocy (D3): $PA \vdash\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \urcorner}) \rightarrow\ \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$.
- Przez kontrapozycję: $PA \vdash\ \neg\, \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow \neg\, \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \urcorner})$.
- Z definicji φ_G mamy: $PA \vdash \varphi_G \rightarrow \neg\, \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$.
- Z powyższego mamy: $PA \vdash \varphi_G \rightarrow \neg\, \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \urcorner})$, czyli $PA \vdash \varphi_G \rightarrow Con_{PA}$. Trzeba jeszcze udowodnić implikację odwrotną.

Dowód II Twierdzenia Gödla

- Na mocy (D2): (†) $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \urcorner})$.
- Z definicji φ_G mamy: $PA \vdash \varphi_G \rightarrow \neg\, \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$.
- Przez kontrapozycję: $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow \neg \varphi_G$.
- Na mocy (D1) oraz (D3) otrzymujemy odpowiednio:
  $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow \neg \varphi_G \urcorner})$
  (‡) $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \urcorner}) \rightarrow \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \neg \varphi_G \urcorner})$.
- Z (†) oraz (‡) mamy: (♡) $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \neg \varphi_G \urcorner})$.
- Mamy także: $PA \vdash \varphi_G \rightarrow (\neg \varphi_G \rightarrow (\varphi_G \wedge \neg \varphi_G))$.
- Na mocy (D1) oraz (D3) mamy:
  $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow (\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \neg \varphi_G \urcorner}) \rightarrow \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \wedge \neg \varphi_G \urcorner}))$.
- Mamy więc też:
  (♣) $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \neg \varphi_G \urcorner}) \rightarrow (\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \rightarrow \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \wedge \neg \varphi_G \urcorner}))$.

Dowód II Twierdzenia Gödla

- Podstawiamy w prawie KRZ $(p \to (q \to r)) \to ((q \to p) \to (q \to r))$: $\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \neg\varphi_G \urcorner})$ za p; $\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$ za q; $\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \wedge \neg\varphi_G \urcorner})$ za r i otrzymujemy:
  $(\spadesuit)$ $PA \vdash (\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \neg\varphi_G \urcorner}) \to (\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \to \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \wedge \neg\varphi_G \urcorner}))) \to ((\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \to \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \neg\varphi_G \urcorner})) \to (\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \to \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \wedge \neg\varphi_G \urcorner})))$
- Z $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ oraz $(\heartsuit)$ dostajemy:
  $(\diamondsuit)$ $\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \to \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \wedge \neg\varphi_G \urcorner})$.
- Ponieważ $PA \vdash (\varphi_G \wedge \neg\varphi_G) \equiv (\underline{0} \doteq \overline{1})$, więc $PA \vdash (\varphi_G \wedge \neg\varphi_G) \to (\underline{0} \doteq \overline{1})$.
- Na mocy (D1) i (D3) mamy:
  $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \wedge \neg\varphi_G \urcorner}) \to \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \urcorner})$.
- A stąd oraz z $(\diamondsuit)$ mamy: $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner}) \to \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \urcorner})$.

Dowód II Twierdzenia Gödla

- Przez kontrapozycję mamy: $PA \vdash \neg \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{0} \dot{=} \underline{1} \urcorner}) \to \neg \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi_G \urcorner})$.
- Na mocy definicji zdania φ_G oraz formuły Con_{PA} otrzymujemy stąd potrzebną implikację: $PA \vdash Con_{PA} \to \varphi_G$.
- Udowodniliśmy obie implikacje: $PA \vdash \varphi_G \to Con_{PA}$ oraz $PA \vdash Con_{PA} \to \varphi_G$, a więc mamy: $PA \vdash \varphi_G \equiv Con_{PA}$.
- Ponieważ (I Twierdzenie Gödla) mamy $PA \ non \vdash \varphi_G$, więc mamy również: $PA \ non \vdash Con_{PA}$, co kończy dowód II Twierdzenia Gödla.

Przy założeniach (D1)–(D3) każde zdanie wyrażające swoją własną niedowodliwość jest równoważne zdaniu Con_{PA} wyrażającemu niesprzeczność PA. Tak więc, przy tych założeniach dowolne dwa zdania gödlowskie są dowodliwie równoważne na gruncie PA: jeśli $PA \vdash \varphi \equiv \neg \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$ oraz $PA \vdash \psi \equiv \neg \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$, to $PA \vdash \varphi \equiv \psi$.

Twierdzenie Löba

Twierdzenie Löba.

Dla dowolnego zdania φ języka PA następujące warunki są równoważne:

1. $PA \vdash \underline{Tw}(\ulcorner \overline{\varphi} \urcorner) \rightarrow \varphi$
2. $PA \vdash \varphi$.

- Niech ψ_H będzie ***zdaniem Henkina*** (zdaniem stwierdzającym swoją własną dowodliwość), czyli takim, iż: $PA \vdash \psi_H \equiv \underline{\mathrm{Tw}}(\ulcorner \overline{\psi_H} \urcorner)$.
- Z Twierdzenia Löba wynika, że zdanie Henkina jest dowodliwe w PA: $PA \vdash \psi_H$.

Dowód Twierdzenia Löba

Dowód. Implikacja 2 $\Rightarrow$ 1 jest oczywista, na mocy aksjomatu $p \to (q \to p)$.

Dowód implikacji 1 $\Rightarrow$ 2.

- Załóżmy, że $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \to \varphi$.
- Na mocy Lematu Przekątniowego istnieje zdanie ψ takie, że: $PA \vdash (\psi \equiv (\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \to \varphi))$.
- Na mocy warunków (D1) oraz (D3) mamy:
  $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \;\equiv\; \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \to \varphi) \urcorner})$
  $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \to (\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \urcorner}) \to \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}))$.
- Na mocy warunku (D2) mamy:
  $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \to \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \urcorner})$.

Dowód Twierdzenia Löba

- Korzystamy teraz z Prawa Fregego:
  $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ i otrzymujemy:
  $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \to \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$.
- Stąd oraz z założenia $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \to \varphi$ mamy:
  $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \to \varphi$.
- Ponieważ PA dowodzi równoważności ψ z $\underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \to \varphi$, więc $PA \vdash \psi$.
- Z $PA \vdash \psi$ otrzymujemy, na mocy (D1): $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$.
- Na mocy reguły odrywania mamy ostatecznie: $PA \vdash \varphi$.

- Inny jeszcze dowód Twierdzenia Löba można otrzymać wykorzystując II Twierdzenie Gödla.
- Z Twierdzenia Löba wynika, że każde dwa zdania Henkina są równoważne na gruncie PA.

Twierdzenie Tarskiego

Twierdzenie Tarskiego. *(Niedefiniowalność prawdy arytmetycznej w PA.)* *Nie istnieje formuła $alf(x)$ języka PA taka, że dla dowolnego zdania φ tego języka: $PA \vdash \varphi \equiv alf(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$.*

- Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że istnieje taka formuła alf.
- Na mocy Lematu Przekątniowego istnieje zdanie ψ takie, że $PA \vdash \psi \equiv \neg alf(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$.
- Ponieważ z przypuszczenia dowodu nie wprost mamy: $PA \vdash \psi \equiv alf(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$, więc otrzymujemy $PA \vdash alf(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \equiv \neg alf(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$.
- To oznacza, że PA jest sprzeczna, wbrew założeniu.
- Przypuszczenie dowodu nie wprost musimy więc odrzucić.
- Ostatecznie, nie istnieje taka formuła alf.

Twierdzenie Tarskiego

- Aksjomaty PA są prawdziwe w modelu standardowym $\mathfrak{N}_0$.
- Wszystkie twierdzenia PA są prawdziwe w modelu standardowym.

- Konsekwencją Twierdzenia Tarskiego jest zatem to, że nie istnieje formuła *alf* języka PA taka, iż dla dowolnego zdania φ tego języka: $\mathfrak{N}_0 \models \varphi$ dokładnie wtedy, gdy $\mathfrak{N}_0 \models \mathit{alf}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$.
- To z kolei oznacza, że w języku PA nie istnieje definicja zbioru tych zdań tego języka, które są prawdziwe w modelu standardowym.

Można udowodnić, że definicja tego zbioru wykracza poza (omówioną w poprzednim wykładzie) hierarchię arytmetyczną.

Twierdzenie Rossera jako konsekwencja LP

Jeśli $\underline{\mathrm{Dow}}$ jest formułą mocno reprezentującą w PA relację Dow, to niech $\underline{\mathrm{Dow}^R}$ będzie formułą:

$\underline{\mathrm{Dow}}(x, y) \wedge \forall z \underline{\leqslant} x \forall w\ (\underline{\mathrm{Dow}}(z, w) \rightarrow (\neg\ \underline{\mathrm{Neg}}(w, y) \wedge \neg\ \underline{\mathrm{Neg}}(y, w))),$

gdzie $\underline{\mathrm{Neg}}$ jest formułą mocno reprezentującą w PA rekurencyjną relację Neg taką, że:

$\mathrm{Neg}(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner)$ dokładnie wtedy, gdy φ jest tożsama z $\neg\psi$.

Formuła $\underline{\mathrm{Dow}^R}(x, y)$ stwierdza zatem, że:

- x jest numerem gödlowskim dowodu formuły o numerze gödlowskim y oraz
- nie istnieje dowód negacji formuły o numerze gödlowskim y, który miałby numer gödlowski mniejszy od x.

Twierdzenie Rossera jako konsekwencja LP

- Niech $\underline{\mathrm{Tw}}^R(y)$ będzie formułą $\exists x\, \underline{\mathrm{Dow}}^R(x,y)$.
- Niech Con^R_{PA} będzie zdaniem $\neg\, \underline{\mathrm{Tw}}^R(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \urcorner})$.

- Dla dowolnego φ: $PA \vdash \neg(\underline{\mathrm{Tw}}^R(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \wedge \underline{\mathrm{Tw}}^R(\overline{\ulcorner \neg\varphi \urcorner}))$.
- W szczególności: $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}^R(\overline{\ulcorner \neg(\underline{0} \doteq \overline{1}) \urcorner}) \rightarrow \neg\, \underline{\mathrm{Tw}}^R(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \urcorner})$.
- Ponieważ $PA \vdash \neg(\underline{0} \doteq \overline{1})$, więc $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}^R(\overline{\ulcorner \neg(\underline{0} \doteq \overline{1}) \urcorner})$.
- W konsekwencji: $PA \vdash \neg\, \underline{\mathrm{Tw}}^R(\overline{\ulcorner \underline{0} \doteq \overline{1} \urcorner})$, czyli $PA \vdash Con^R_{PA}$.
- Formuła $\underline{\mathrm{Tw}}^R$ nie może zatem spełniać warunków dowodliwości (D1)–(D3). Dowodzi się, że $\underline{\mathrm{Tw}}^R$ nie spełnia (D2).
- Formuła Con^R_{PA} wyraża własność niesprzeczności PA, ale ***dowodliwą*** na gruncie PA.

Twierdzenie Rossera jako konsekwencja LP

Na mocy Lematu Przekątniowego istnieje zdanie φ_R takie, że:
$PA \vdash \varphi_R \equiv \neg \underline{\mathrm{Tw}}^R(\ulcorner \overline{\varphi_R} \urcorner)$.

Twierdzenie.

Niech φ_R będzie określonym powyżej zdaniem. Wtedy:

1. *PA non $\vdash \varphi_R$*
2. *PA non $\vdash \neg\varphi_R$.*

- **Dowód punktu 1.** Jeśli PA jest niesprzeczna, to formuły $\underline{\mathrm{Dow}}$ oraz $\underline{\mathrm{Dow}^R}$ mocno reprezentują w PA tę samą relację.
- Zachodzi zatem warunek (D1) dla $\underline{\mathrm{Tw}^R}$, czyli: jeśli $PA \vdash \varphi$, to $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}^R}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$, dla wszystkich φ.
- Tak samo jak w (drugim) dowodzie I Twierdzenia Gödla pokazujemy, że: PA *non* $\vdash \varphi_R$.

Twierdzenie Rossera jako konsekwencja LP

Dowód punktu 2.

- Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $PA \vdash \neg\varphi_R$.
- Niech d będzie numerem gödlowskim jakiegoś dowodu zdania $\neg\varphi_R$.
- Ponieważ $Dow(d, \ulcorner\neg\varphi_R\urcorner)$, a $\underline{\mathrm{Dow}^R}$ mocno reprezentuje w PA relację Dow^R (czyli również relację Dow), więc $PA \vdash \underline{\mathrm{Dow}^R}(\overline{d}, \overline{\ulcorner\neg\varphi_R\urcorner})$.
- Na mocy definicji zdania φ_R oraz przypuszczenia dowodu nie wprost mamy: $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}^R}(\overline{\ulcorner\varphi_R\urcorner})$.
- To oznacza, że: $PA \vdash \exists x\ (\underline{\mathrm{Dow}}(x, \overline{\ulcorner\varphi_R\urcorner}) \wedge \forall z \underline{\leqslant} x \forall w\ (\underline{\mathrm{Dow}}(z, w) \rightarrow (\neg\underline{\mathrm{Neg}}(w, \overline{\ulcorner\varphi_R\urcorner}) \wedge \neg\underline{\mathrm{Neg}}(\overline{\ulcorner\varphi_R\urcorner}, w))))$.
- Oznaczmy przez $\rho(x)$ podformułę powyższej formuły, będącą zasięgiem kwantyfikatora $\exists x$. Mamy wtedy:

Twierdzenie Rossera jako konsekwencja LP

- $PA \vdash \exists x\, ((x \underline{\leqslant} \overline{d} \vee x \underline{\geq} \overline{d}) \wedge \rho(x))$.
- $PA \vdash \exists x\, ((x \underline{\leqslant} \overline{d} \wedge \rho(x)) \vee (x \underline{\geq} \overline{d} \wedge \rho(x)))$.
- $PA \vdash \exists x\, (x \underline{\leqslant} \overline{d} \wedge \rho(x)) \vee \exists x\, (x \underline{\geq} \overline{d} \wedge \rho(x))$.
- Ponieważ $PA \vdash \underline{\mathrm{Dow}}^R(\overline{d}, \overline{\ulcorner \neg\varphi_R \urcorner})$, więc drugi składnik powyższej alternatywy jest sprzeczny.
- Mamy więc: $PA \vdash \exists x\, (x \underline{\leqslant} \overline{d} \wedge \rho(x))$
- Ponieważ $PA \vdash (x \underline{\leqslant} \overline{d} \equiv (x \doteq \underline{0} \vee x \doteq \overline{1} \vee \ldots \vee x \doteq \overline{d}))$, więc mamy: $PA \vdash \underline{\mathrm{Dow}}(\underline{0}, \overline{\ulcorner \varphi_R \urcorner}) \vee \underline{\mathrm{Dow}}(\overline{1}, \overline{\ulcorner \varphi_R \urcorner}) \vee \ldots \vee \underline{\mathrm{Dow}}(\overline{d}, \overline{\ulcorner \varphi_R \urcorner})$.
- To jest sprzeczne z $PA \vdash \underline{\mathrm{Dow}}^R(\overline{d}, \overline{\ulcorner \neg\varphi_R \urcorner})$.
- Przypuszczenie dowodu nie wprost musimy więc odrzucić i mamy ostatecznie: $PA\ non \vdash \neg\varphi_R$.

Inne zdania samozwrotne

Twierdzenie. *Załóżmy, że PA niesprzeczna oraz że formuła* $\underline{Tw}$ *spełnia warunki (D2), (D3) i warunek (D1′): PA* $\vdash \varphi$ *dokładnie wtedy, gdy PA* $\vdash \underline{Tw}(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$*. Wtedy:*

1. *Jeśli* φ *jest takie, że PA* $\vdash \varphi \equiv (\neg\, \underline{Tw}(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \wedge \neg\, \underline{Tw}(\overline{\ulcorner\neg\varphi\urcorner}))$*, to PA* $\vdash \neg\varphi$ *oraz PA non* $\vdash \varphi$*. [Tu* φ *stwierdza własną nierozstrzygalność.]*
2. *Jeśli* φ *jest takie, że PA* $\vdash \varphi \equiv (\underline{Tw}(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \vee \underline{Tw}(\overline{\ulcorner\neg\varphi\urcorner}))$*, to PA* $\vdash \varphi$*. [Tu* φ *stwierdza własną rozstrzygalność.]*
3. *Jeśli* φ *jest takie, że PA* $\vdash \varphi \equiv \neg\underline{Tw}(\overline{\ulcorner\neg\varphi\urcorner})$*, to PA* $\vdash \neg\varphi$ *(oraz PA non* $\vdash \varphi$*). [Tu* φ *stwierdza własną niesprzeczność z PA.]*
4. *Jeśli* φ *jest takie, że PA* $\vdash \varphi \equiv \underline{Tw}(\overline{\ulcorner\neg\varphi\urcorner})$*, to PA non* $\vdash \varphi$ *oraz PA non* $\vdash \neg\varphi$*. [Tu* φ *stwierdza własną sprzeczność z PA.]*

Inne zdania samozwrotne

Zarys dowodu.

Każde ze zdań wymienionych w twierdzeniu istnieje na mocy Lematu Przekątniowego.

1. Na mocy definicji φ: $PA \vdash \varphi \to \neg \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \neg\varphi \urcorner})$, a przez kontrapozycję: $PA \vdash \underline{\mathrm{Tw}}(\overline{\ulcorner \neg\varphi \urcorner}) \to \neg\varphi$. Na mocy Twierdzenia Löba mamy: $PA \vdash \neg\varphi$. Z niesprzeczności PA: $PA\ non \vdash \varphi$.
2. To konsekwencja poprzedniego punktu.
3. Na mocy definicji φ zdanie $\neg\varphi$ jest zdaniem Henkina, a zatem $PA \vdash \neg\varphi$.
4. Na mocy definicji φ zdanie $\neg\varphi$ jest zdaniem gödlowskim. Tak więc, na mocy I Twierdzenia Gödla: $PA\ non \vdash \varphi$ oraz $PA\ non \vdash \neg\varphi$.

Istotna niezupełność arytmetyki PA

Z podanych w tym wykładzie twierdzeń wynika, że jeśli arytmetyka PA jest niesprzeczna, to jest: niezupełna oraz nierozstrzygalna.

- Przez ***rekurencyjne rozszerzenie arytmetyki PA*** rozumiemy każdą teorię pierwszego rzędu, która jest rozszerzeniem PA o rekurencyjny zbiór aksjomatów i której zbiór numerów gödlowskich symboli pozalogicznych jest rekurencyjny.
- Teoria T (w której możliwa jest arytmetyzacja składni) jest ***istotnie niezupełna***, jeśli T jest (niesprzeczna i) niezupełna oraz każde jej niesprzeczne rozszerzenie rekurencyjne jest niezupełne.

Jeśli arytmetyka PA jest niesprzeczna, to jest istotnie niezupełna.

Uwagi końcowe

Twierdzenia Gödla uważa się za najbardziej doniosłe dokonanie w logice XX wieku. Istnieje na ten temat olbrzymia literatura.

Szczególnie polecamy lekturę dwóch monografii:

- Krajewski, S. 2003. *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne. Od mechanicyzmu do postmodernizmu.* Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa.
- Murawski, R. 2000^3. *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań. Kilka wykładów z niniejszego cyklu przygotowano właśnie na podstawie tej monografii.

Wykorzystywana literatura

- Barwise, J. (ed.) 1977. *Handbook of mathematical logic.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York Oxford.
- Bell, J.L., Machover, M. 1977. *A course in mathematical logic.* North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford.
- Cutland, N. 1980. *Computability. An introduction to recursive function theory.* Cambridge University Press, Cambridge.
- Hinman, P.G. 2005. *Fundamentals of Mathematical Logic.* A K Peters, Wellesley.
- Krajewski, S. 2003. *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne. Od mechanicyzmu do postmodernizmu.* Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa.
- Mendelson, E. 1997. *Introduction to mathematical logic.* Chapman & Hall, London.

Wykorzystywana literatura

- Murawski, R. 2000[3]. *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
- Odifreddi, P.G. 1989. *Classical recursion theory.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Shoenfield, J.R. 1967. *Mathematical logic.* Addison-Wesley, Reading, MA.
- Smorynski, C. 1977. *The incompleteness theorems.* W: J. Barwise (ed.) 1977. *Handbook of mathematical logic.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York Oxford, 821–866.
- Smullyan, R. 1992. *Gödel's incompleteness theorems.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.
- Smullyan, R. 1993. *Recursion theory for metamathematics.* Oxford University Press.