METODY DOWODZENIA TWIERDZEŃ I AUTOMATYZACJA ROZUMOWAŃ

WYKŁAD 6B: REZOLUCJA – PRZYKŁADY

III rok kognitywistyki UAM, 2016–2017

1 Kilka uwag terminologicznych

Słuchacze zapewne pamiętają z zajęć dotyczących PROLOGu poniższą terminologię.

Literałami nazywamy zmienne zdaniowe oraz negacje zmiennych zdaniowych.

Literałem *komplementarnym* do literału ℓ nazywamy literał $\overline{\ell}$, zdefiniowany następująco:

- jeśli ℓ jest literałem pozytywnym ℓ', to $\overline{\ell}$ jest literałem negatywnym $\neg\ell'$
- jeśli ℓ jest literałem negatywnym $\neg\ell'$, to $\overline{\ell}$ jest literałem pozytywnym ℓ'.

Pamiętamy z poprzednich wykładów: alternatywy elementarne, koniunkcje elementarne, alternatywne postacie normalne, koniunkcyjne postacie normalne.

Klauzulą nazwiemy dowolny skończony zbiór literałów.

Klauzulę pustą (nie zawierającą żadnych elementów) oznaczamy przez [ ] (inne często używane oznaczenie: $\Box$).

Klauzule zawierające najwyżej jeden literał pozytywny nazywamy *klauzulami Hornowskimi*.

Są zatem trzy możliwości dla klauzuli Hornowskiej C:

1. C zawiera tylko literały negatywne;
2. C zawiera dokładnie jeden literał pozytywny i żadnych negatywnych;
3. C zawiera dokładnie jeden literał pozytywny oraz literały negatywne.

Zauważmy, że klauzula Hornowska:

1. postaci $\{\neg p_1, \neg p_2, \ldots, \neg p_n\}$ jest inferencyjnie równoważna formule: $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow\bot$

2. postaci $\{p_1\}$ jest inferencyjnie równoważna formule: $\top \rightarrow p_1$

3. postaci $\{\neg p_1, \neg p_2, \ldots, \neg p_n, p_{n+1}\}$ jest inferencyjnie równoważna formule: $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow p_{n+1}$.

Klauzulą programową nazywamy każdą klauzulę z dokładnie jednym literałem pozytywnym.

Jeśli klauzula programowa zawiera jakieś literały negatywne, to nazywamy ją *regułą*; w przeciwnym przypadku nazywamy ją *faktem*.

Klauzulą celową nazywamy klauzulę bez literałów pozytywnych.

Programem nazywamy zbiór klauzul programowych (reguł lub faktów). Programy odpowiadają programom rozważanym w PROLOGu.

Przypomnijmy jeszcze postać reguły rezolucji (w KRZ):

Niech C_1 i C_2 będą klauzulami i niech literał ℓ występuje w C_1, a literał $\overline{\ell}$ występuje w C_2. Wtedy każdą klauzulę postaci:

$$(C_1 - \{\ell\}) \cup (C_2 - \{\overline{\ell}\})$$

nazywamy *rezolwentą* klauzul C_1 i C_2. Zamiast *rezolwenta* używa się też terminu: *rezolwent*. Logice jest oczywiście obojętny rodzaj gramatyczny. Jeśli C_1 i C_2 są powyższej postaci, to mówimy też, że C_1 i C_2 *kolidują* ze względu na literały ℓ oraz $\overline{\ell}$.

Jak być może słuchacze mieli okazję dowiedzieć się na zajęciach dotyczących PROLOGu, praktycznie wykorzystuje się różne bardziej subtelne wersje metody rezolucyjnej.

2 Uwagi o notacji

Jedną z zalet notacji dowodów rezolucyjnych zaproponowanej w Fitting 1990 jest to, że pozwala ona przeprowadzać jednocześnie:

1. procedurę tworzenia koniunkcyjnej postaci normalnej badanej formuły

2. zastosowania reguły rezolucji (nie tylko względem pary kolidujących literałów).

Wykonamy za chwilę parę ćwiczeń, posługując się tą notacją. Czujemy się jednak zobowiązani do zwrócenia uwagi słuchaczy na to, że w omawiana w różnych podręcznikach metoda rezolucji przedstawiana bywa z użyciem różnych notacji:

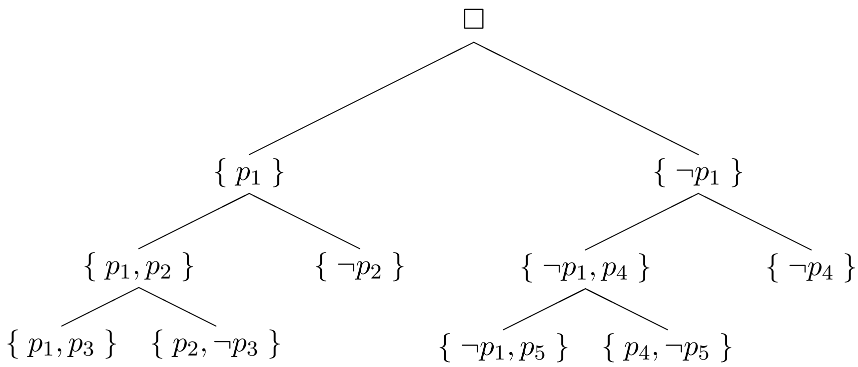
1. Alternatywy elementarne bywają zapisywane jako zbiory literałów, a koniunkcje takich alternatyw jako zbiory takich zbiorów. Wtedy np. formułę $(\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \wedge p_1 \wedge \neg p_3$ reprezentuje się przez:

$$\{\{\neg p_1, p_2\}, \{\neg p_2, p_3\}, \{p_1\}, \{\neg p_3\}\}.$$

2. Alternatywy elementarne bywają zapisywane w postaci konkatenacji literałów, a koniunkcje takich alternatyw jako zbiory takich ciągów. Wtedy np. formułę $(\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \wedge p_1 \wedge \neg p_3$ reprezentuje się przez: $\{\ p_1p_2, \neg p_2p_3, p_1\neg p_3\ \}$.

Dowody rezolucyjne zapisywane bywają także w postaci drzew, których wierzchołki znakowane są zbiorami formuł (alternatywami elementarnymi). Spójrzmy na parę przykładów:

1. Niech $S = \{\{p_1, p_3\}, \{p_2, \neg p_3\}, \{\neg p_2\}, \{\neg p_1, p_5\}, \{\neg p_4\}, \{p_4, \neg p_5\}\}$ będzie zbiorem klauzul (czyli, w tej notacji: zbiorem alternatyw elementarnych). Poniższe drzewo jest rezolucyjnym drzewem dowodowym klauzuli pustej ze zbioru S:



W drzewie tym liście znakowane są zbiorami literałów (czyli odpowiadającymi im w tej notacji alternatywami elementarnymi). Pozostałe wierzchołki drzewa otrzymywane są poprzez zastosowanie reguły rezolucji do swoich bezpośrednich potomków.

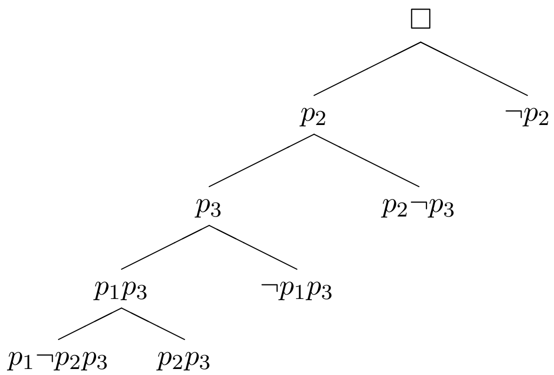
2. Pokażemy, że ze zbioru:

$$\{p_1\neg p_2p_3, p_2p_3, \neg p_1p_3, p_2\neg p_3, \neg p_2\}$$

(w tej notacji konkatenacje tworzące ten zbiór odpowiadają alternatywom elementarnym literałów) wyprowadzić można klauzulę pustą.

1.	$p_1 \neg p_2 p_3$	przesłanka
2.	$p_2 p_3$	przesłanka
3.	$\neg p_1 p_3$	przesłanka
4.	$p_2 \neg p_3$	przesłanka
5.	$\neg p_2$	przesłanka
6.	$p_1 p_3$	rezolwenta 1 i 2
7.	p_3	rezolwenta 6 i 3
8.	p_2	rezolwenta 7 i 4
9.	$\square$	rezolwenta 8 i 5.

Powyższe wyprowadzenie reprezentowane jest przez następujące rezolucyjne drzewo dowodowe:



Podkreślamy, że sprawa notacji jest w istocie drugorzędna. Wspomnieliśmy o tym m.in. dlatego, żeby słuchacze nie czuli się zagubieni wertując strony różnych podręczników.

3 Rezolucja w KRZ: notacja Fittinga

3. Zbadaj, czy mają dowody rezolucyjne:

1. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
2. $((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$
3. $(p \to q) \to ((r \to s) \to (\neg q \to \neg p))$
4. $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (r \to p)$
5. $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to \neg(\neg r \wedge p)$

4. Zbadaj, czy z podanych zbiorów formuł można wyprowadzić alternatywę pustą [ ] (czyli, czy zbiory te są rezolucyjnie sprzeczne, a zatem także niespełnialne):

1. $\{\ p \to \neg(q \vee r),\ q,\ \neg(p \to r)\ \}$
2. $\{\ p \to q,\ r \to q,\ (p \vee r) \to q\ \}$
3. $\{\ p \to q,\ p \vee q,\ \neg q\ \}$

4 Dalsze dowody rezolucyjne w KRZ

Rozważymy też kilka prostych przykładów korzystania z reguły rezolucji dla przypadków, gdy dysponujemy już koniunkcyjnymi postaciami normalnymi rozważanych formuł lub gdy łatwo widać, jak przedstawić te formuły w postaci odpowiednich alternatyw elementarnych.

5. Niech $S = \{p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_1, \neg p_3\}$. Pokażemy, że S nie jest rezolucyjnie niesprzeczny, czyli że $S \vdash_{pr} \Box$.

Możemy przedstawić S jako zbiór klauzul: $\{\neg p_1 \vee p_2, \neg p_2 \vee p_3, p_1, \neg p_3\}$.

Wyprowadzenie rezolucyjne klauzuli pustej z tego zbioru klauzul wygląda następująco:

1.	$\neg p_1 \vee p_2$	przesłanka
2.	$\neg p_2 \vee p_3$	przesłanka
3.	p_1	przesłanka
4.	$\neg p_3$	przesłanka
5.	$\neg p_1 \vee p_3$	rezolwenta 1 i 2
6.	p_3	rezolwenta 3 i 5
7.	$\Box$	rezolwenta 4 i 6.

Zauważmy, że $\{p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_1\} \models_{krz} p_3$, co oznacza, że zbiór

$$\{p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_1, \neg p_3\}$$

nie jest spełnialny (nie istnieje wartościowanie, przy którym wszystkie elementy tego zbioru mają wartość 1).

6. Pokażemy, że zbiór formuł

$$S = \{p_1 \to (\neg p_2 \vee (p_3 \wedge p_4)), p_1, p_2, \neg p_4\}$$

nie jest rezolucyjnie niesprzeczny.

Przy pewnej wprawie (zastąpić implikację alternatywą zaprzeczonego poprzednika i następnika, skorzystać z łączności alternatywy, a potem zastosować prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji) zauważamy, że pierwsza z formuł tego zbioru jest równoważna koniunkcji alternatyw elementarnych:

$(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_4)$.

Czy to widać? Mamy kolejno:

$p_1 \to (\neg p_2 \vee (p_3 \wedge p_4))$
$\neg p_1 \vee (\neg p_2 \vee (p_3 \wedge p_4))$
$(\neg p_1 \vee \neg p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)$
$(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_4)$

Jeśli nie mamy tej wprawy, to stosujemy zalecony przez Fittinga algorytm. Do czego oczywiście zachęcam.

Pozostałe elementy S są literałami. Derywacja rezolucyjna przybiera zatem postać:

1.	$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$	przesłanka
2.	$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_4$	przesłanka
3.	p_1	przesłanka
4.	p_2	przesłanka
5.	$\neg p_4$	przesłanka
6.	$\neg p_1 \vee \neg p_2$	rezolwenta 2 i 5
7.	$\neg p_1$	rezolwenta 4 i 6
8.	$\Box$	rezolwenta 3 i 7.

4.1 Wykorzystanie trafności i pełności metody rezolucji

Ze względu na trafność i pełność metody rezolucji w KRZ możemy przy jej pomocy ustalać m.in.:

1. czy formuła jest tautologią KRZ
2. czy zbiór formuł jest spełnialny
3. czy wniosek wynika logicznie z przesłanek.

7. Pokażemy, że formuła:

$$(\bigstar) \quad \neg((p_1 \to p_2) \to ((p_1 \vee p_3) \to (p_2 \vee p_3)))$$

nie jest spełnialna. Oznacza to, że formuła:

$$(\bigstar\bigstar) \quad (p_1 \to p_2) \to ((p_1 \vee p_3) \to (p_2 \vee p_3))$$

jest tautologią KRZ.

Formuła ($\bigstar$) jest równoważna następującej koniunkcji:

$$(\neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_3) \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3.$$

Przekonać się o tym można stosując poznany wcześniej algorytm. Przy pewnej wprawie można jednak zauważyć to od razu. Potrafimy to zrobić?

Przeprowadzamy dowód rezolucyjny, wychodząc od członów tej koniunkcji jako przesłanek i starając się wyprowadzić alternatywę pustą $\Box$:

1.	$\neg p_1 \vee p_2$	przesłanka
2.	$p_1 \vee p_3$	przesłanka
3.	$\neg p_2$	przesłanka
4.	$\neg p_3$	przesłanka
5.	p_1	rezolwenta 2 i 4
6.	p_2	rezolwenta 1 i 5
9.	$\Box$	rezolwenta 3 i 6.

8. Pokażemy, że formuła p_3 wynika logicznie ze zbioru formuł:

$$S = \{p_1, (p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3, p_4 \rightarrow p_2, p_4\}.$$

W tym celu wystarczy pokazać, że zbiór

$$\{p_1, (p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3, p_4 \rightarrow p_2, p_4, \neg p_3\}$$

nie jest spełnialny.

Każda formuła ze zbioru S jest równoważna stosownej alternatywie:

1. p_1
2. $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$
3. $\neg p_4 \vee p_2$
4. p_4.

Pokazujemy, że z powyższych alternatyw oraz $\neg p_3$ można wyprowadzić $\Box$:

1.	p_1	przesłanka
2.	$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3$	przesłanka
3.	$\neg p_4 \vee p_2$	przesłanka
4.	p_4	przesłanka
5.	$\neg p_3$	przesłanka
6.	$\neg p_1 \vee \neg p_2$	rezolwenta 2 i 5
7.	$\neg p_2$	rezolwenta 6 i 1
8.	$\neg p_4$	rezolwenta 3 i 7
9.	$\Box$	rezolwenta 4 i 8.

5 Dowody rezolucyjne w KRP

W tym przypadku dowody stają się ciekawe dopiero wtedy, gdy należycie wykorzystujemy procedurę unifikacji (uzgadniania). O tym – na osobnym wykładzie.

6 Ciekawostka: łańcuszniki

Lewis Carroll posługiwał się swoistą regułą rezolucji już w wieku XIX. Był też twórcą prototypu metody tablic analitycznych. W polskiej literaturze można o tym przeczytać np. w:

Pogonowski, J. 2008. Metoda rezolucji i tablice analityczne w *Symbolic Logic* Lewisa Carrolla. *Investigationes Linguisticae* **16**, 195–218. Dostępne na stronie:

http://www.inveling.amu.edu.pl/pdf/Jerzy_Pogonowski_inve16.pdf

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
http://logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl