Wstęp do Matematyki (4)

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl
pogon@amu.edu.pl

Liczby kardynalne

Wprowadzenie

Ta prezentacja ma charakter mocno Humanistyczny. Mówimy w niej mianowicie o bardzo ezoterycznych bytach: *liczbach porządkowych i kardynalnych*.

Z czysto matematycznego punktu widzenia, używane pojęcia są bardzo proste — wykorzystujemy pojęcia teorii mnogości takie, jak: zbiór, relacja, funkcja.

Rozumienie przedstawionych konstrukcji wymaga jednak, oprócz skupienia, także wyobraźni.

A tego właśnie — wyobraźni — Humanistkom przecież nie brakuje.

Czym jest liczba elementów zbioru?

Posługując się definicjami:

- pojęcia równoliczności
- zbioru $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych (definicja von Neumanna)
- nieskończoności (w sensie Dedekinda)

możemy zdefiniować, jak widzieliśmy, zbiory: skończone, przeliczalne i nieprzeliczalne.

Z Twierdzenia Cantora wynika, że istnieją nierównoliczne zbiory nieskończone. Jak określić liczbę ich elementów? Jak liczby te porównywać? W jaki sposób określić na nich działania arytmetyczne?

Równoliczność

Będziemy stosować *oznaczenia*:

- Jeśli zbiory X i Y są równoliczne (czyli gdy istnieje bijekcja z X na Y), to piszemy: $|X| = |Y|$.
- Jeśli istnieje iniekcja z X w Y, to piszemy $|X| \leqslant |Y|$.
- Jeśli $|X| \leqslant |Y|$ oraz nie zachodzi $|X| = |Y|$, to piszemy $|X| < |Y|$.

Mówimy, że:

- zbiory X i Y są *tej samej mocy*, gdy są równoliczne, czyli gdy $|X| = |Y|$.
- zbiór X jest *mocy niewiększej niż* zbiór Y, gdy $|X| \leqslant |Y|$.
- zbiór X jest *mocy mniejszej niż* zbiór Y, gdy $|X| < |Y|$.

Uwaga. To tylko *sposób mówienia*. Nie zdefiniowaliśmy, czym są **moce** zbiorów.

Równoliczność

Dla dowolnych zbiorów A, B, C, D:

- Jeśli $|A| = |B|$, $|C| = |D|$ oraz $A \cap B = \emptyset = C \cap D$, to $|A \cup B| = |C \cup D|$.
- Jeśli $|A| = |B|$, to $|\wp(A)| = |\wp(B)|$.
- $|\wp(A)| = |\{0,1\}^A|$.
- Jeśli $|A| = |C|$ i $|B| = |D|$, to $|A^B| = |C^D|$.
- Jeśli $B \cap C = \emptyset$, to dla dowolnego A: $|A^{B \cup C}| = |A^B \times A^C|$.
- $(|A^B)^C| = |A^{B \times C}|$.
- $|A| < |\wp(A)|$.

Uwaga! Aksjomaty teorii mnogości ZF nie rozstrzygają, czy z tego, że $|A| < |B|$ wynika, iż $|\wp(A)| < |\wp(B)|$.

Twierdzenie Cantora-Bernsteina

Lemat Banacha. Niech $f : A \to B$ oraz $g : b \to A$ będą iniekcjami. Wtedy istnieją zbiory A_1, A_2, B_1, B_2 takie, że:

- $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$,
- $B_1 \cup B_2 = B$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$,
- $f[A_1] = B_1$,
- $g[B_2] = a_2$.

Twierdzenie Cantora-Bernsteina. Jeśli $|A| \leqslant |B|$ oraz $|B| \leqslant |A|$, to $|A| = |B|$.

Zbiory przeliczalne

Jak może wiesz ze szkoły, piszemy $|A| = \aleph_0$ zamiast $|A| = |\mathbb{N}|$ (czyli sformułowania: A jest przeliczalny).

- Skończony produkt zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny.
- Suma przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna.

Równoliczność $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ ustalają np. bijekcje:

- $f(n, m) = 2^n \cdot (2m + 1) - 1$
- $g(n, m) = \binom{n+m+1}{2} + n$.

Równoliczność $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{Q}$ ustala np. suriekcja:

$$f(n, m) = \frac{n}{m+1}.$$

Zbiory mocy kontinuum

Jak może wiesz ze szkoły, jeśli $|A| = |\mathbb{R}|$, to mówimy, że A *jest mocy kontinuum* i piszemy $|A| = \mathfrak{c}$.

- $|\wp(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.
- $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.
- $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

Zbiory mocy kontinuum są nieprzeliczalne.

Istnieją też zbiory nieprzeliczalne, które nie są mocy kontinuum: np. zbiór $\wp(\mathbb{R})$.

Liczby porządkowe

Mówimy, że zbiór X jest:

- *przechodni*, gdy każdy element X jest podzbiorem X;
- *liczbą porządkową*, gdy X jest zbiorem przechodnim i dla wszystkich różnych elementów $Y, Z \in X$ zachodzi alternatywa: $Y \in Z$ lub $Z \in Y$;
- *liczbą kardynalną*, gdy jest liczbą porządkową i $|Y| < |X|$ dla wszystkich $Y \in X$.

Przypominamy, że X^* oznacza zbiór $X \cup \{X\}$. Niech ω oznacza $\subseteq$-najmniejszy zbiór zawierający jako element zbiór $\emptyset$ oraz domknięty na operację * (tj. zawierający, wraz z każdym elementem X także element X^*).

Liczby porządkowe oznaczamy literami α, β, γ, itd.

Liczby porządkowe

- Elementy dowolnej liczby porządkowej są liczbami porządkowymi.
- Dla dowolnych elementów X, Y liczby porządkowej α: $X \subseteq Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \in Y$ lub $X = Y$.
- Dla dowolnych liczb porządkowych α, β: $\alpha \in \beta$ lub $\beta \in \alpha$ lub $\alpha = \beta$.

Dla dowolnych liczb porządkowych definiujemy: $\alpha \prec \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in \beta$. Niech $\alpha \preceq \beta$ oznacza, że $\alpha \prec \beta$ lub $\alpha = \beta$. Wtedy:

- Dla każdej liczby porządkowej α, relacja $\preceq$ dobrze porządkuje α.
- Jeśli α jest liczbą porządkową i $X \subseteq \alpha$ jest odcinkiem $\preceq$-początkowym, to:
  - $X = \alpha$ **lub**
  - $X = \beta$, gdzie β jest $\preceq$-najmniejszym elementem w $\alpha - X$.

Liczby porządkowe

- Każdy odcinek początkowy liczby porządkowej jest liczbą porządkową.
- Jeśli α jest liczbą porządkową, to $\alpha \cup \{\alpha\}$ jest liczbą porządkową.
- Jeśli A jest zbiorem liczb porządkowych, to $\bigcup A$ jest liczbą porządkową.
- Nie istnieje zbiór wszystkich liczb porządkowych.

Zermelo. Dla każdego zbioru X istnieje dobry porządek w X.

Ernst Zermelo (1871–1953) był twórcą pierwszej aksjomatyki dla teorii mnogości.
Jedną z głównych motywacji dla stworzenia tej aksjomatyki był właśnie dowód powyższego twierdzenia.

Liczby porządkowe

Mówimy, że liczba porządkowa α jest:

- *liczbą następnikową*, gdy $\alpha = \emptyset$ lub $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ dla pewnej liczby porządkowej β;
- *liczbą graniczną*, gdy α nie jest liczbą następnikową.

Dla każdej liczby porządkowej α zbiór $\alpha^* = \alpha \cup \{\alpha\}$ jest $\preceq$-najmniejszą liczbą porządkową $\prec$-większą niż α.
Zamiast $\alpha \cup \{\alpha\}$ pisze się często $\alpha + 1$.
Liczba ω jest graniczną liczbą porządkową.
Liczba $\omega + 1$ jest następnikową liczbą porządkową.
Wszystkie liczby naturalne (w sensie definicji von Neumanna) są następnikowymi liczbami porządkowymi.

Liczby porządkowe

Liczba porządkowa α jest graniczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = \bigcup \alpha$.

Niech ω_1 będzie $\preceq$-najmniejszą nieprzeliczalną liczbą porządkową. Wtedy zbiór:

$$\{\beta : \omega \preceq \beta \prec \omega_1\}$$

wszystkich przeliczalnych liczb porządkowych jest nieprzeliczalny. Każdy element tego zbioru jest zbiorem przeliczalnym.

Zbiór ω wszystkich skończonych liczb porządkowych jest przeliczalny, a każdy jego element jest zbiorem skończonym.

Indukcja pozaskończona

Sformułowanie zasady indukcji pozaskończonej wymaga znajomości języka teorii mnogości — zob. Dodatek 1.

Zasada indukcji pozaskończonej. Niech φ będzie dowolną formułą języka teorii mnogości ZF.
Jeśli dla każdej liczby porządkowej α oraz wszystkich $\beta \in \alpha$, formuła $\varphi(\beta)$ implikuje formułę $\varphi(\alpha)$, to dla wszystkich liczb porządkowych α zachodzi $\varphi(\alpha)$.

Twierdzenie o rekursji pozaskończonej. Niech ψ będzie formułą taką, że dla każdego x istnieje dokładnie jeden y taki, że $\psi(x, y)$. Wtedy: dla każdej liczby porządkowej α istnieje dokładnie jedna funkcja f o dziedzinie α taka, że dla wszystkich $\beta \in \alpha$ zachodzi $\psi(f \upharpoonright \beta, f(\beta))$.

Działania na liczbach porządkowych

Powyższe dwa twierdzenia umożliwiają poprawne zdefiniowanie działań dodawania $\oplus$ i mnożenia $\odot$ liczb porządkowych (tu 0 oznacza $\emptyset$):

- $\alpha \oplus 0 = \alpha$
- $\alpha \oplus \beta^* = (\alpha \oplus \beta)^*$
- $\alpha \oplus \lambda = \bigcup\{\alpha \oplus \beta : \beta \prec \lambda\}$ dla λ granicznych;

- $\alpha \odot 0 = 0$
- $\alpha \odot \beta^* = (\alpha \odot \beta) \oplus \alpha$
- $\alpha \odot \lambda = \bigcup\{\alpha \odot \beta : \beta \prec \lambda\}$ dla λ granicznych.

Zwykle zamiast $\oplus$ piszemy $+$, a zamiast $\odot$ piszemy $\cdot$.

Działania na liczbach porządkowych

W takiej uproszczonej notacji definicje dodawania i mnożenia liczb porządkowych przyjmują postać:

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
- $\alpha + \lambda = \bigcup\{\alpha + \beta : \beta \prec \lambda\}$ dla λ granicznych;

- $\alpha \cdot 0 = 0$
- $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$
- $\alpha \cdot \lambda = \bigcup\{\alpha \cdot \beta : \beta \prec \lambda\}$ dla λ granicznych.

Mamy np.: $1 + \omega = \omega \prec \omega + 1$ oraz $2 \cdot \omega = \omega \prec \omega \cdot 2 = \omega + \omega \prec \omega \cdot \omega$.

Liczby kardynalne

Przypominamy, że α jest *liczbą kardynalną*, gdy jest liczbą porządkową i $|\beta| < |\alpha|$ dla wszystkich $\beta \in \alpha$. Liczby porządkowe α o tej własności nazywane są także *początkowymi liczbami porządkowymi*.

Jeśli α jest nieskończoną liczbą kardynalną, to α jest graniczną liczbą porządkową.

Nie każda liczba porządkowa jest liczbą kardynalną. Dla przykładu, liczby porządkowe $\omega + \omega$ oraz $\omega \cdot \omega$ nie są liczbami kardynalnymi.

Hierarchia kumulatywna zbiorów

Przez indukcję pozaskończoną definiujemy *hierarchię kumulatywną zbiorów*:

- $R_0 = \emptyset$
- $R_{\alpha+1} = \wp(R_\alpha)$
- $R_\lambda = \bigcup\{R_\beta : \beta \prec \lambda\}$ dla λ granicznych.

Wtedy:

- Każdy zbiór R_α jest przechodni.
- Dla każdego zbioru X istnieje liczba porządkowa α taka, że $X \in R_\alpha$.

R_ω to rodzina zbiorów *dziedzicznie skończonych*.

Przyporządkowanie Hartogsa

Dla każdego zbioru X istnieje liczba porządkowa α taka, że:

- nie istnieje iniekcja $f : \alpha \to X$.

Dla dowolnego zbioru X niech:

- $H(X) =$ *liczba Hartogsa zbioru X* $= \prec$-najmniejsza liczba porządkowa α taka, że nie istnieje iniekcja $f : \alpha \to X$.

Dla każdego zbioru X istnieje jego liczba Hartogsa.

Skala alefów

Przez indukcję pozaskończoną definiujemy *skalę alefów*:

- $\aleph_0 = \omega$
- $\aleph_{\alpha+1} = H(\aleph_\alpha)$
- $\aleph_\lambda = \bigcup\{\aleph_\beta : \beta \prec \lambda\}$ dla λ granicznych.

Alefy tworzą ciąg *pozaskończony*:

$$\aleph_0 \prec \aleph_1 \prec \aleph_2 \prec \ldots \aleph_\omega \prec \aleph_{\omega+1} \prec \aleph_{\omega+2} \prec \ldots \aleph_{\omega+\omega} \prec \ldots$$

Dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej κ istnieje liczba porządkowa α taka, że $\kappa = \aleph_\alpha$.

Działania na liczbach kardynalnych

Dla każdego zbioru X istnieje liczba kardynalna κ taka, że $|X| = |\kappa|$. Oczywiście liczba ta jest dokładnie jedna. Nazywamy ją *mocą zbioru X*. Gdy $|X| = |\kappa|$, to *piszemy $|X| = \kappa$* (lub $\kappa = |X|$).

Dodawanie, mnożenie i potęgowanie liczb kardynalnych definiujemy następująco:

- $\kappa + \lambda = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$
- $\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$
- $\kappa^\lambda = |\kappa^\lambda|$.

Jeśli κ i λ są nieskończonymi liczbami kardynalnymi, to $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

Działania na liczbach kardynalnych

Niektóre własności działań na liczbach kardynalnych:

- Jeśli $\kappa \preceq \lambda$, to:
  - $\kappa + \mu \preceq \lambda + \mu$
  - $\kappa \cdot \mu \preceq \lambda \cdot \mu$
  - $\kappa^{\mu} \preceq \lambda^{\mu}$
  - $\mu^{\kappa} \preceq \mu^{\lambda}$.
- $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$
- $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$
- $\kappa^{\lambda + \mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$.

Działania na liczbach kardynalnych

Definiujemy dowolne sumy oraz iloczyny liczb kardynalnych:

- $\sum\limits_{i \in I} \kappa_i = |\bigcup\limits_{i \in I}(\kappa_i \times \{i\})|$
- $\prod\limits_{i \in I} \kappa_i = |\prod\limits_{i \in I} \kappa_i|$.

Twierdzenie Königa. Jeśli $\lambda_i \prec \kappa_i$ dla wszystkich $i \in I$, to:

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \prec \prod_{i \in I} \kappa_i.$$

Potęgowanie liczb kardynalnych

- *Współkońcowością* liczby kardynalnej κ nazywamy najmniejszą liczbę porządkową α taką, że: istnieje funkcja $f : \alpha \to \kappa$ taka, że dla każdej $\beta \prec \kappa$ istnieje $\gamma \prec \alpha$ taka, że $\beta \prec f(\gamma)$. Współkońcowość κ oznaczamy przez $cof(\kappa)$.
- Przez κ^+ oznaczamy $\prec$-najmniejszą liczbę kardynalną $\prec$-większą od κ.
- Mówimy, że nieskończona liczba kardynalna κ jest *regularna*, gdy $\kappa = cof(\kappa)$. Liczby kardynalne, które nie są regularne, nazywamy *singularnymi*.

- Jeśli $2 \preceq \lambda \preceq \kappa$ i $\omega \preceq \kappa$, to $\lambda^\kappa = 2^\kappa$.
- **König**. Jeśli κ jest nieskończona, to $\kappa \prec cof(2^\kappa)$.
- W szczególności: $\aleph_0 \prec cof(2^{\aleph_0})$.
- **Hausdorff**. Jeśli $\omega \preceq \kappa$ i $2 \preceq \lambda \preceq \kappa$, to $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda$.

Potęgowanie liczb kardynalnych

Na mocy definicji, $cof(\kappa)$ jest najmniejszą liczbą kardynalną λ taką, że zbiór mocy κ jest sumą λ swoich podzbiorów.
Mamy np.: $cof(\aleph_0) = cof(\aleph_\omega) = cof(\aleph_{\omega+\omega}) = cof(\aleph_{\omega^\omega}) = \aleph_0$.

Liczba κ jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy dowolna suma mniej niż κ zbiorów mocy mniejszej niż κ ma moc mniejszą niż κ. Liczba $\aleph_0$ jest regularna. Każda liczba postaci $\aleph_{\alpha+1}$ jest regularna. Każda liczba postaci κ^+ jest regularna (dla nieskończonych κ).

- Jeśli κ jest nieskończona, to $cof(\kappa)$ jest regularna ($cof(cof(\kappa)) = \kappa$).
- Liczby $\aleph_\omega$ oraz $\aleph_{\omega_1}$ nie są regularne ($cof(\aleph_{\omega_1}) = \aleph_1 \prec \aleph_{\omega_1}$).
- $cof(\aleph_{\aleph_{\alpha+1}}) = \aleph_{\alpha+1}$.
- $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ dla każdej liczby porządkowej α.

Potęgowanie liczb kardynalnych

Liczbę $2^{\aleph_0}$ nazywamy *kontinuum* i oznaczamy przez $\mathfrak{c}$. Liczba kardynalna $\mathfrak{c}$ jest nieprzeliczalna.
Mamy: $|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.

Liczby $\aleph_0$ oraz $\mathfrak{c}$ to nieskończone liczby kardynalne najczęściej używane w praktyce matematycznej.

- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0^n = \aleph_0$, dla wszystkich $n \in \omega$.
- $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, dla wszystkich $n \in \omega$.

- Żaden zbiór mocy kontinuum nie jest sumą przeliczalnie wielu swoich podzbiorów mocy mniejszej niż kontinuum.

Hipoteza kontinuum

Następujących zdań nie można ani udowodnić, ani odrzucić na mocy aksjomatów teorii mnogości ZF:

- **CH** (*hipoteza kontinuum*): $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$
- **GCH** (*uogólniona hipoteza kontinuum*): $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$ dla wszystkich liczb porządkowych α.

- **Gödel** udowodnił, że jeśli ZF jest niesprzeczna, to niesprzeczna jest ZF wraz z GCH.
- **Cohen** udowodnił, że jeśli ZF jest niesprzeczna, to niesprzeczna jest ZF wraz z zaprzeczeniem GCH.

W konsekwencji, oba te zdania są *niezależne* od teorii mnogości ZF.

Hipoteza kontinuum

Easton. Niech f będzie funkcją określoną dla liczb kardynalnych i spełniającą następujące warunki:

- jeśli $\kappa \preceq \lambda$, to $f(\kappa) \preceq f(\lambda)$
- $\kappa \prec cof(f(\kappa))$ dla κ regularnych.

Wtedy: jeśli ZF jest niesprzeczna, to niesprzeczna jest ZF łącznie ze zdaniem:

- $f(\kappa) = 2^\kappa$ dla wszystkich regularnych liczb kardynalnych κ.

Z twierdzenia Eastona wynika zatem, że jeśli ZF jest niesprzeczna, to dla dowolnej n, teoria ZF wraz ze zdaniem $\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$ jest niesprzeczna.

Hipoteza kontinuum

Silver. Niech:

- $\aleph_1 \preceq cof(\kappa) \prec \kappa$
- jeśli $\lambda \prec \kappa$, to $2^\lambda = \lambda^+$.

Wtedy: $2^\kappa = \kappa^+$.

Shelah. Dla wszystkich $n \prec \omega$: jeśli $2^{\aleph_n} \prec \aleph_\omega$, to $2^{\aleph_\omega} \prec \aleph_{\aleph_4}$.

Wymienione wyżej twierdzenia pokazują m.in., że (w przypadku CH) jedynym ograniczeniem na wartość $2^{\aleph_0}$ jest:

- $\aleph_0 \prec cof(2^{\aleph_0})$.

Liczby nieosiągalne

Mówimy, że liczba kardynalna κ jest *graniczna*, gdy κ jest nieprzeliczalna oraz $\lambda^+ \prec \kappa$ dla wszystkich $\lambda \prec \kappa$.

Uwaga. „Graniczna liczba kardynalna" i „graniczna liczba porządkowa" to dwa różne pojęcia.

$\aleph_\alpha$ jest graniczną liczbą kardynalną wtedy i tylko wtedy, gdy α jest graniczną liczbą porządkową.

- κ jest *słabo nieosiągalna*, gdy κ jest regularną graniczną liczbą kardynalną.
- κ jest *mocno nieosiągalna* (*nieosiągalna*), gdy κ jest słabo nieosiągalna i $2^\lambda \prec \kappa$ dla wszystkich $\lambda \prec \kappa$.

κ jest słabo nieosiągalna wtedy i tylko wtedy, gdy: $\aleph_0 \prec \kappa$, $cof(\kappa) = \kappa$ oraz $\lambda^+ \prec \kappa$ dla wszystkich $\lambda \prec \kappa$.

Jeśli κ jest mocno nieosiągalna, to $\kappa = \aleph_\kappa$.

Jeszcze o potęgowaniu liczb kardynalnych

Potęgowanie nieskończonych liczb kardynalnych jest operacją bardzo skomplikowaną.

Tarski. Niech κ będzie graniczną liczbą kardynalną oraz niech $1 \preceq \lambda \prec cof(\kappa)$. Wtedy:

$$\kappa^{\lambda} = \sum_{\mu \prec \kappa} \mu^{\lambda}.$$

Załóżmy, że prawdziwa jest GCH. Dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ oraz dowolnej liczby kardynalnej $0 \prec \lambda$:

- $\kappa^{\lambda} = \kappa$, jeśli $\lambda \prec cof(\kappa)$
- $\kappa^{\lambda} = \kappa^{+}$, jeśli $cof(\kappa) \preceq \lambda \prec \kappa$
- $\kappa^{\lambda} = \lambda^{+}$, jeśli $\kappa \preceq \lambda$.

Duże liczby kardynalne

Istnienie liczb mocno nieosiągalnych nie wynika z aksjomatów teorii mnogości ZF.

Rozważa się także **znacznie większe** liczby kardynalne niż liczby mocno nieosiągalne (np. liczby *mierzalne*).

Oczywiście, nie istnieje **zbiór** wszystkich liczb kardynalnych.

Skala liczb kardynalnych jest **pozaskończona**.

Koniec

Zadanie domowe.

- Spróbuj Zapamiętać ze Zrozumieniem: konstrukcję liczb porządkowych i kardynalnych, działania na tych liczbach, zasadę indukcji pozaskończonej.
- Przygotuj się do sprawdzianu.

Prezentacje 1–3 dotyczyły bardzo elementarnych pojęć.
W dalszym ciągu zajmiemy się różnymi **strukturami matematycznymi**.