Rezolucja

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
www.kognitywistyka.amu.edu.pl
www.logic.amu.edu.pl/index.php/Dydaktyka
pogon@amu.edu.pl

MDTiAR 17xi2015

Rezolucja w KRZ

- Dowody rezolucyjne w KRZ są równie proste, jak dowody tablicowe.
- Metoda rezolucji także jest metodą nie wprost: dla wykazania, że φ jest tezą, staramy się utworzyć *zamkniętą derywację rezolucyjną* dla formuły $\neg\varphi$.

- Dowody rezolucyjne wykorzystują koniunkcyjne postacie normalne: pracujemy na uogólnionych koniunkcjach uogólnionych alternatyw.
- W propozycji Fittinga dowody rezolucyjne zapisujemy w sposób liniowy: krokami dowodowymi są poszczególne uogólnione alternatywy.

W tym wykładzie ograniczymy się do bardzo ogólnych uwag, dotyczących metody rezolucji w językach pierwszego rzędu. W osobnym wykładzie omówiona zostanie procedura *unifikacji* (*uzgadniania*) i jej znaczenie w logice pierwszego rzędu.

Reguły

Reguły *tworzenia derywacji rezolucyjnej* zapisane w notacji Smullyana (dla języka KRZ) są następujące:

$$\frac{\neg\neg\psi}{\psi} \qquad \frac{\neg\top}{\bot} \qquad \frac{\neg\bot}{\top}$$

$$\begin{array}{c} \beta \\ | \\ \beta_1 \\ | \\ \beta_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \alpha & \\ \swarrow & & \searrow \\ \alpha_1 & & \alpha_2 \end{array}$$

Reguła dla β-formuł działa wewnątrz alternatywy, reguła dla α-formuł tworzy dwie alternatywy, zapisywane jedna pod drugą.

Tworzenie rezolwent

Jeśli D_1 oraz D_2 są dwiema uogólnionymi alternatywami oraz φ występuje jako jeden z członów alternatywy w D_1, natomiast $\neg\varphi$ występuje jako jeden z członów alternatywy w D_2, to niech D będzie wynikiem wykonania następujących operacji:

1. usunięcia wszystkich wystąpień φ z D_1
2. usunięcia wszystkich wystąpień $\neg\varphi$ z D_2
3. utworzenia jednej alternatywy D z alternatyw otrzymanych w wyniku wykonania dwóch powyższych kroków.

Mówimy w takim przypadku, że D jest *rezolwentą* D_1 oraz D_2 (względem pary formuł: φ, $\neg\varphi$; czasami krócej: względem formuły φ).

Jeśli alternatywa F zawiera wystąpienia literału $\perp$, to alternatywę powstałą z niej poprzez usunięcie wszystkich wystąpień $\perp$ nazywamy *trywialną* rezolwentą F.

Reguła rezolucji.

D wynika rezolucyjnie z D_1 oraz D_2, gdy D jest rezolwentą D_1 oraz D_2 względem pewnej formuły φ. Podobnie, *D trywialnie wynika rezolucyjnie* z D_1, gdy D jest trywialną rezolwentą D_1.

Oczywiście szczególnym przypadkiem tak rozumianej reguły rezolucji jest rezolucja względem literału (i tak rozumie się regułę rezolucji w większości podręczników):

Jeśli alternatywa D_1 zawiera literał L, natomiast alternatywa D_2 zawiera literał do niego komplementarny $\overline{L}$, to *rezolwentą* D_1 oraz D_2 względem L jest alternatywa D powstająca poprzez usunięcie wszystkich wystąpień L z D_1, usunięcie wszystkich wystąpień $\overline{L}$ z D_2 i utworzenie jednej alternatywy z tak otrzymanych wyników.

Jeśli alternatywy potraktujemy jak zbiory formuł, to tak rozumiana reguła rezolucji przyjmuje następującą postać formalną: $\frac{D_1 \qquad D_2}{(D_1 - \{L\}) \cup (D_2 - \{\overline{L}\})}$

Derywacje rezolucyjne

Derywację rezolucyjną definiujemy w sposób następujący:

1. Niech $\{ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \}$ będzie skończonym zbiorem formuł języka KRZ. *Derywacją rezolucyjną* zbioru $\{ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \}$ nazywamy ciąg:

$$\begin{array}{c} [\varphi_1] \\ | \\ [\varphi_2] \\ | \\ \vdots \\ | \\ [\varphi_n] \end{array}$$

2. Jeśli S jest derywacją rezolucyjną dla $\{ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \}$, zaś D powstaje z pewnych wierszy S poprzez zastosowanie jakiejś reguły tworzenia derywacji rezolucyjnej lub reguły rezolucji, to ciąg S przedłużony o element D także jest derywacją rezolucyjną dla $\{ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \}$.

Dowody rezolucyjne

Derywację rezolucyjną zawierającą alternatywę pustą [ ] nazywamy *zamkniętą*. Pamiętamy, że wartość logiczna alternatywy pustej równa jest 0 dla każdego wartościowania zmiennych zdaniowych. Alternatywę pustą oznacza się w wielu podręcznikach przez $\Box$.

Dowodem rezolucyjnym formuły φ nazywamy zamkniętą derywację rezolucyjną dla $\{\neg\varphi\}$. Mówimy, że φ jest *tezą* systemu rezolucyjnego dla KRZ, co zapisujemy $\vdash_{pr} \varphi$, gdy φ ma dowód rezolucyjny.

Przykład (Fitting 1990, 48). Następny slajd przedstawia dowód rezolucyjny formuły:
$((p \wedge q) \vee (r \rightarrow s)) \rightarrow ((p \vee (r \rightarrow s)) \wedge (q \vee (r \rightarrow s)))$

Uwaga. Przykład ten wymaga pewnego komentarza.

1.	$[\neg(((p \wedge q) \vee (r \to s)) \to ((p \vee (r \to s)) \wedge (q \vee (r \to s))))]$	
2.	$[(p \wedge q) \vee (r \to s)]$	α, 1
3.	$[\neg((p \vee (r \to s)) \wedge (q \vee (r \to s)))]$	α, 1
4.	$[p \wedge q, r \to s]$	β, 2
5.	$[p, r \to s]$	α, 4
6.	$[q, r \to s]$	α, 4
7.	$[\neg(p \vee (r \to s)), \neg(q \vee (r \to s))]$	β, 3
8.	$[\neg p, \neg(q \vee (r \to s))]$	α, 7
9.	$[\neg(r \to s), \neg(q \vee (r \to s))]$	α, 7
10.	$[\neg p, \neg q]$	α, 8
11.	$[\neg p, \neg(r \to s)]$	α, 8
12.	$[\neg(r \to s), \neg q]$	α, 9
13.	$[\neg(r \to s), \neg(r \to s)]$	α, 9
14.	$[p, \neg q]$	RR: 5,12, $r \to s$
15.	$[\neg q]$	RR: 10,14, p
16.	$[r \to s]$	RR: 6,15, q
17.	$[\,]$	RR: 13,16, $r \to s$

Trafność metody rezolucji

- Powiemy, że derywacja rezolucyjna S jest *spełnialna*, jeśli istnieje wartościowanie, przy którym każdy wiersz w S ma wartość 1.
- **Fakt**. Dowolne zastosowanie reguły konstrukcji derywacji rezolucyjnej lub reguły rezolucji do spełnialnej derywacji rezolucyjnej daje spełnialną derywację rezolucyjną.

- **Fakt**. Jeśli istnieje zamknięta derywacja rezolucyjna dla zbioru formuł S, to S nie jest spełnialny.
- **Twierdzenie o Trafności Metody Rezolucyjnej w KRZ**. Jeśli φ ma dowód rezolucyjny, to φ jest tautologią KRZ.

Konsekwencja rezolucyjna

Niech S będzie zbiorem alternatyw. *Derywacją rezolucyjną ze zbioru* S (*wyprowadzeniem rezolucyjnym ze zbioru* S) jest ciąg alternatyw, z których każda:

1. jest elementem S *lub*
2. powstaje z wcześniejszego elementu tego ciągu poprzez zastosowanie którejś z reguł tworzenia derywacji rezolucyjnej *lub*
3. powstaje z wcześniejszych elementów tego ciągu jako ich rezolwenta.

Mówimy, że alternatywa D jest *rezolucyjnie wyprowadzalna* z S, gdy D jest ostatnim elementem jakiejś derywacji rezolucyjnej z S.

Powiększenia

Niech φ będzie dowolną formułą języka KRZ. Przez *φ-powiększenie* alternatywy $[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n]$ rozumiemy zarówno $[\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n]$ jak i $[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n]$. Jeśli S jest zbiorem alternatyw, zaś S^* jest wynikiem zastąpienia każdego elementu S przez jego φ-powiększenie, to mówimy, że S^* jest *φ-powiększeniem* S.

- **Fakt o powiększeniach**. Załóżmy, że S_1 i S_2 są zbiorami alternatyw oraz S_2 jest φ-powiększeniem S_1. Jeśli alternatywa D_1 jest rezolucyjnie wyprowadzalna z S_1, to istnieje φ-powiększenie D_2 alternatywy D_1 takie, że D_2 jest rezolucyjnie wyprowadzalna z S_2.
- Faktu tego dowodzimy przez indukcję po długości wyprowadzenia rezolucyjnego z S_1 (zob. Fitting 1990, 59).

Rezolucyjna niesprzeczność

Skończony zbiór S formuł języka KRZ nazywamy *rezolucyjnie niesprzecznym*, gdy nie istnieje zamknięte wyprowadzenie rezolucyjne z S. Na mocy tej definicji $\{ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \}$ jest rezolucyjnie niesprzeczny, gdy nie istnieje wyprowadzenie rezolucyjne z $\{ [\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n] \}$ pustej alternatywy $[\,]$.
Zbiory formuł, które nie są rezolucyjnie niesprzeczne, nazwiemy *rezolucyjnie sprzecznymi*. Tak więc, S jest rezolucyjnie sprzeczny, gdy istnieje wyprowadzenie rezolucyjne z $\{ [\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n] \}$ pustej alternatywy $[\,]$.

Lemat. Rodzina wszystkich zbiorów rezolucyjnie niesprzecznych jest zdaniową własnością niesprzeczności.
Dowód. Warunki dla zmiennych zdaniowych, $\bot$ oraz $\neg\top$ są oczywiste. Pozostałe przypadki wymagają odrobinę żmudnego, aczkolwiek nietrudnego sprawdzenia. Jak czyniliśmy to już poprzednio, w każdym z przypadków prowadzimy dowód nie wprost:

Dowód lematu

Załóżmy, że $\neg\neg\psi \in S$ i przypuśćmy, że $S \cup \{\psi\}$ nie jest rezolucyjnie niesprzeczny. Pokażemy, że S nie jest rezolucyjnie niesprzeczny.

Niech zatem $S = \{ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \neg\neg\psi \}$. Ponieważ $S = \{ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi \}$ nie jest rezolucyjnie niesprzeczny, więc istnieje wyprowadzenie, powiedzmy $\mathbb{D}$, alternatywy pustej $[\,]$ ze zbioru $\{ [\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n], [\psi] \}$. Zbudujmy wyprowadzenie $\mathbb{D}^*$ z $\{ [\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n], [\neg\neg\psi] \}$ w sposób następujący: najpierw stosujemy regułę dotyczącą podwójnej negacji, otrzymując $\{ [\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n], [\neg\neg\psi], [\psi] \}$, a następnie wykonujemy wszystkie kroki wyprowadzenia $\mathbb{D}$. Wtedy oczywiście $\mathbb{D}^*$ jest wyprowadzeniem alternatywy pustej $[\,]$ z $\{ [\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n], [\psi] \}$, czyli S nie jest rezolucyjnie niesprzeczny.

Dowód lematu

Załóżmy, że $\alpha \in S$ i przypuśćmy, że $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ nie jest rezolucyjnie niesprzeczny. Pokażemy, że S nie jest rezolucyjnie niesprzeczny.

Niech zatem $S = \{ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \alpha \}$. Ponieważ $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ nie jest rezolucyjnie niesprzeczny, więc istnieje wyprowadzenie, powiedzmy $\mathbb{D}$, alternatywy pustej [ ] ze zbioru $\{ [\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n], [\alpha], [\alpha_1], [\alpha_2] \}$. Zbudujmy wyprowadzenie $\mathbb{D}^*$ z $\{ [\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n], [\alpha] \}$ w sposób następujący: najpierw stosujemy α-regułę otrzymując $\{ [\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n], [\alpha], [\alpha_1], [\alpha_2] \}$, a następnie wykonujemy wszystkie kroki wyprowadzenia $\mathbb{D}$. Wtedy oczywiście $\mathbb{D}^*$ jest wyprowadzeniem alternatywy pustej [ ] z $\{ [\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n], [\alpha] \}$, czyli S nie jest rezolucyjnie niesprzeczny.

Dowód lematu

Załóżmy, że $\beta \in S$ i przypuśćmy, że ani $S \cup \{\beta_1\}$ ani $S \cup \{\beta_2\}$ nie jest rezolucyjnie niesprzeczny. Pokażemy, że S nie jest rezolucyjnie niesprzeczny.

Niech zatem $S = \{ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \beta \}$. Zauważmy, że zastosowanie rezolucyjnej β-reguły do wyprowadzenia rozpoczynającego się od $[\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n], [\beta]$ pozwala nam dodać doń $[\beta_1, \beta_2]$. Tak więc, aby pokazać, że S nie jest rezolucyjnie niesprzeczny, wystarczy pokazać, że istnieje rezolucyjne wyprowadzenie alternatywy pustej $[\,]$ z $[\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n], [\beta], [\beta_1], [\beta_2]$.

Dowód lematu

Ponieważ $S \cup \{\beta_1\}$ nie jest rezolucyjnie niesprzeczny, więc istnieje rezolucyjne wyprowadzenie alternatywy pustej [ ] z $\{\ [\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n], [\beta], [\beta_1]\ \}$. Wtedy na mocy faktu o powiększeniach istnieje rezolucyjne wyprowadzenie z $\{\ [\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n], [\beta], [\beta_1], [\beta_2]\ \}$: albo alternatywy pustej [ ], albo $[\beta_2]$. W pierwszym przypadku dowód nie wprost jest zakończony. W przypadku drugim, ponieważ $S \cup \{\beta_2\}$ nie jest rezolucyjnie niesprzeczny, więc istnieje rezolucyjne wyprowadzenie, powiedzmy $\mathbb{D}$, alternatywy pustej [ ] z: $\{\ [\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n], [\beta], [\beta_2]\ \}$. Wszystkie alternatywy tworzące to wyprowadzenie występują w skonstruowanym wcześniej wyprowadzeniu z $[\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n], [\beta], [\beta_1], [\beta_2]$. Dołączając do nich wyprowadzenie $\mathbb{D}$ otrzymujemy wyprowadzenie alternatywy pustej [ ] z $\{\ [\varphi_1], [\varphi_2], \ldots, [\varphi_n], [\beta], [\beta_2]\ \}$, co kończy dowód nie wprost.

Twierdzenie o Pełności

- **Twierdzenie o Pełności Metody Rezolucyjnej w KRZ**. Jeśli φ jest tautologią KRZ, to φ ma dowód rezolucyjny.
- **Dowód**. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Jeśli φ nie ma dowodu rezolucyjnego, to nie istnieje zamknięta derywacja rezolucyjna dla $\{\neg\varphi\}$. Wtedy $\{\neg\varphi\}$ jest rezolucyjnie niesprzeczny, a zatem jest spełnialny, na mocy udowodnionego przed chwilą lematu oraz Twierdzenia o Istnieniu Modelu. A zatem φ nie jest tautologią KRZ.

- Podobnie, jak w przypadku tablic analitycznych możemy też rozważać rezolucyjne wyprowadzenia ze zbioru przesłanek. Jeśli S jest zbiorem formuł języka KRZ, to dla dowolnej $\varphi \in S$ w derywacji rezolucyjnej dodajemy jako osobny wiersz $[\varphi]$.
- Piszemy $S \vdash_{pr} \varphi$, gdy istnieje zamknięta derywacja rezolucyjna dla $\neg\varphi$, wykorzystująca przesłanki z S.

W przypadku języków pierwszego rzędu, dodajemy następujące reguły rozszerzania rezolucyjnego (w notacji Smullyana):

$$\begin{array}{c} \gamma \\ | \\ \gamma(t) \end{array}$$

(dla dowolnego termu domkniętego języka $L^{\mathbf{par}}$)

$$\begin{array}{c} \delta \\ | \\ \delta(a) \end{array}$$

(dla dowolnego nowego parametru a)

- Wprowadzone uprzednio pojęcia (derywacja rezolucyjna, dowód rezolucyjny, itp.) przenoszą się, z oczywistymi modyfikacjami składniowymi, na przypadek języków pierwszego rzędu.
- Piszemy $S \vdash_{fr} \varphi$, gdy istnieje zamknięta derywacja rezolucyjna dla $\neg\varphi$, wykorzystująca przesłanki z S.

Prosty przykład

Dowód rezolucyjny zdania $\forall x(P(x) \lor Q(x)) \to (\exists x P(x) \lor \forall x Q(x))$:

1.	$[\neg(\forall x(P(x) \lor Q(x)) \to (\exists x P(x) \lor \forall x Q(x)))]$	
2.	$[\forall x(P(x) \lor Q(x))]$	α, 1
3.	$[\neg(\exists x P(x) \lor \forall x Q(x))]$	α, 1
4.	$[\neg\exists x P(x)]$	α, 3
5.	$[\neg\forall x Q(x)]$	α, 3
6.	$[\neg Q(a)]$	δ, 5, a
7.	$[\neg P(a)]$	γ, 4, a
8.	$[P(a) \lor Q(a)]$	γ, 2, a
9.	$[P(a), Q(a)]$	β, 8
10.	$[Q(a)]$	RR: 7,9, $P(a)$
11.	$[\,]$	RR: 10,6, $Q(a)$

Trafność i pełność

- Derywacja rezolucyjna $\mathbb{D}$ jest *spełnialna*, jeśli istnieje model, w którym prawdziwa jest każda alternatywa należąca do $\mathbb{D}$.
- **Fakt**. Zastosowanie dowolnej reguły konstrukcji derywacji rezolucyjnej lub reguły rezolucji do spełnialnej derywacji rezolucyjnej daje w wyniku spełnialną derywację rezolucyjną.
- **Trafność rezolucji w KRP**. Jeśli φ ma dowód rezolucyjny, to φ jest tautologią KRP.

- Skończony zbiór S języka $L^{\mathbf{par}}$ jest *rezolucyjnie niesprzeczny*, gdy nie istnieje zamknięta derywacja rezolucyjna dla S.
- **Fakt**. Rodzina wszystkich zbiorów rezolucyjnie niesprzecznych jest własnością niesprzeczności pierwszego rzędu.
- **Pełność rezolucji w KRP**. Jeśli φ jest tautologią KRP, to φ ma dowód rezolucyjny.