METODY DOWODZENIA TWIERDZEŃ I AUTOMATYZACJA ROZUMOWAŃ

WYKŁAD 7A: DEDUKCJA NATURALNA

III rok kognitywistyki UAM, 2019–2020

Niniejszy tekst oparty jest na przedstawieniu systemu dedukcji naturalnej w książce Fitting 1990. Zaletą tego przedstawienia jest m.in. to, że dowody trafności i pełności systemu dedukcji naturalnej przeprowadzane są tak samo, jak w przypadku innych technik dowodowych omawianych w książce Fittinga, a mianowicie poprzez odwołanie się do stosownej ogólnej własności niesprzeczności i wykorzystanie lematu Hintikki. Z teoretycznego punktu widzenia takie ujęcie, wykorzystujące notację Smullyana, jest korzystne. Podany przez Fittinga zespół reguł jest jednak nadmiarowy, można dedukcję naturalną przedstawiać w bardziej ekonomiczny sposób. Większość analizowanych tu przykładów nie jest podana w Fitting 1990.

1 Intuicje

Systemy dedukcji naturalnej mają być logiczną reprezentacją rozumowań przeprowadzanych zarówno w matematyce, jak i w niektórych (choć nie wszystkich) nieformalnych argumentacjach, które przeprowadzamy codziennie. W obu przypadkach dedukcja naturalna jest pewną idealizacją rzeczywiście przeprowadzanych rozumowań.

Typowa sytuacja w systemach dedukcji naturalnej jest następująca. Gdy przyjmujemy założenie φ i potrafimy z niego wyprowadzić ψ, to uznajemy, że udowodniliśmy implikację $\varphi \to \psi$. Z założenia φ korzystamy jedynie w wyprowadzeniu formuły ψ, a więc po uzyskaniu implikacji $\varphi \to \psi$ *uchylamy* założenie φ. W książce Fittinga proponuje się reprezentację graficzną takiej sytuacji w postaci pudełka zawierającego wyprowadzenie φ z ψ wraz z podpisaną pod nim implikacją $\varphi \to \psi$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \varphi & \text{zał.} \\ \vdots & \\ \psi & \end{array}}$$
$$\varphi \to \psi$$

Możemy myśleć o dowodach w systemie dedukcji naturalnej jako tworzonych na pewnych etapach, przy czym określamy wyraźnie, z których formuł korzystamy na danym etapie. Formułami *aktywnymi* na danym etapie nazywamy te formuły, które występują w dotąd niezamkniętych na tym etapie pudełkach.

Powyżej opisano procedurę *wprowadzania* implikacji do dowodu. Typową regułą w systemach dedukcji naturalnej jest też reguła *opuszczania* implikacji, czyli znana już słuchaczom reguła *modus ponens*: z φ oraz $\varphi \to \psi$ otrzymujemy ψ, o ile na rozważanym etapie dowodu obie formuły φ oraz $\varphi \to \psi$ są aktywne.

Systemy dedukcji naturalnej opierają się na regułach wprowadzania i regułach opuszczania (eliminacji), formułowanych dla poszczególnych stałych logicznych. Cechą charakterystyczną tych systemów jest to, że nie zawierają one aksjomatów, a właśnie jedynie reguły.

2 Reguły

Reguły systemu DN dedukcji naturalnej dla klasycznego rachunku zdań zapisujemy, korzystając z notacji Smullyana. Reguły wprowadzania będą opatrzone symbolem $\mathcal{I}$, zaś reguły opuszczania (eliminacji) symbolem $\mathcal{E}$.

2.1 Reguła wprowadzania założeń RWZ

$$\frac{}{\varphi \quad \text{zał.}}$$

Reguła RWZ pozwala na wprowadzanie założeń do dowodu, przy czym założenia te zostają na stosownym etapie uchylone.

2.2 Reguły dla verum i falsum

Mamy w systemie regułę eliminacji dla falsum $\perp \mathcal{E}$ oraz regułę wprowadzania dla verum $\top\mathcal{I}$:

$$\frac{\perp}{\varphi} \qquad \frac{}{\top}$$

W regule $\perp \mathcal{E}$ formuła φ jest dowolną formułą rozważanego języka.

2.3 Reguły dla negacji

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \\ \neg\varphi\end{array}}{\perp} \qquad \begin{array}{c}\boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots \\ \perp\end{array}} \\ \neg\varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\boxed{\begin{array}{c}\neg\varphi \\ \vdots \\ \perp\end{array}} \\ \varphi\end{array}$$

Pierwsza (z lewej) reguła $\perp \mathcal{I}$ jest dość oczywista: jeśli w dowodzie pojawiła się para formuł wzajem sprzecznych, to możemy dołączyć do dowodu $\perp$. Drugą z reguł $\neg\mathcal{I}$ (regułę wprowadzania negacji) rozumieć należy następująco. Jeśli z założenia φ udało nam się wyprowadzić $\perp$, to założenie φ uchylamy i dołączamy do dowodu formułę $\neg\varphi$. Podobnie dla trzeciej reguły $\neg\mathcal{E}$ dla negacji (reguły eliminacji negacji).

2.4 Reguły dla α-formuł

Przypominamy, że α-formułami są np.: koniunkcja, zaprzeczona alternatywa oraz zaprzeczona implikacja.

Reguły $\alpha\mathcal{E}$ opuszczania dla α-formuł:

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2}$$

Reguły $\alpha\mathcal{I}$ wprowadzania dla α-formuł:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}{\alpha}$$

2.5 Reguły dla β-formuł

Przypominamy, że β-formułami są np.: alternatywa, implikacja, zaprzeczona koniunkcja.

Reguły $\beta\mathcal{E}$ opuszczania dla β-formuł:

$$\frac{\begin{array}{c}\neg\beta_1\\ \beta\end{array}}{\beta_2} \qquad \frac{\begin{array}{c}\neg\beta_2\\ \beta\end{array}}{\beta_1}$$

Reguły opuszczania dla β-formuł są dość oczywiste: z formuły typu β oraz zaprzeczenia jednego z jej składników możemy wyprowadzić drugi ze składników.

Reguły $\beta\mathcal{I}$ wprowadzania dla β-formuł:

$$\begin{array}{c}\boxed{\begin{array}{c}\neg\beta_1\\ \vdots\\ \beta_2\end{array}}\\ \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\boxed{\begin{array}{c}\neg\beta_2\\ \vdots\\ \beta_1\end{array}}\\ \beta\end{array}$$

Reguły wprowadzania dla β-formuł rozumieć należy następująco. Jeśli z zaprzeczenia składnika β_1 możemy wyprowadzić składnik β_2, to uchylamy założenie $\neg\beta_1$ i możemy wprowadzić do dowodu formułę β. Podobnie dla drugiej tego typu reguły.

2.6 Reguła przepisywania RP

W dowodzie (bądź wyprowadzeniu) wolno powtórzyć dowolne założenie aktywne na danym etapie (czyli nieuchylone na tym etapie).

3 Pewne reguły wtórne

W systemach dedukcji naturalnej użyteczne są różne reguły wtórne (wyprowadzalne). Dla przykładu, w systemie DN tu omawianym takie są reguły wprowadzania $\neg\neg\mathcal{I}$ i opuszczania $\neg\neg\mathcal{E}$ podwójnej negacji:

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi} \qquad \frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$$

Wyprowadzenie powyższych reguł z pierwotnych reguł systemu DN nie jest trudne. Dla przykładu, pokażmy, że wyprowadzalna jest reguła opuszczania podwójnej negacji $\neg\neg\mathcal{E}$. Przypuśćmy, że w wierszu dowodu o numerze (n) znajduje się formuła $\neg\neg\varphi$. Wtedy w dowodzie tym otrzymać możemy również formułę φ, odwołując się do reguł pierwotnych systemu:

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
(n)\ \ \neg\neg\varphi \\
\boxed{\begin{array}{c}(n+1)\ \ \neg\varphi \\ (n+2)\ \ \bot\end{array}} \\
(n+3)\ \ \varphi
\end{array}
$$

Tutaj wiersz $(n + 1)$ jest wprowadzany regułą wprowadzania założeń, wiersz $(n + 2)$ otrzymujemy z wierszy (n) oraz $(n + 1)$ na mocy pierwszej z reguł pierwotnych dla negacji, natomiast wiersz $(n + 3)$ otrzymujemy na mocy trzeciej z reguł pierwotnych dla negacji. Wyprowadziliśmy zatem formułę φ z formuły $\neg\neg\varphi$ korzystając jedynie z reguł pierwotnych systemu, a więc reguła opuszczania podwójnej negacji jest regułą wtórną systemu DN.

4 Pewne reguły dotyczące implikacji

Na mocy przyjętego zestawu reguł, znana słuchaczom reguła *modus tollens* (w skrócie: MT) jest jedną z reguł pierwotnych, natomiast reguła *modus ponens* (w skrócie: MP) może zostać wyprowadzona jako wtórna. Za β (w regułach opuszczania) weźmy formułę $\varphi \to \psi$. Wtedy β_1 jest formułą $\neg\varphi$, a β_2 jest formułą ψ. Mamy zatem następujące reguły dla implikacji:

$$\frac{\begin{array}{c}\neg\neg\varphi \\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi} \qquad \frac{\begin{array}{c}\neg\psi \\ \varphi \to \psi\end{array}}{\neg\varphi}$$

Reguła z prawej to *modus tollens*, zaś reguła z lewej, wraz z wyprowadzoną przed chwilą regułą opuszczania podwójnej negacji, pozwala wprowadzić do systemu także regułę *modus ponens* w znanej słuchaczom postaci.

Teraz za β (w regułach wprowadzania) weźmy formułę $\varphi \to \psi$. Wtedy β_1 jest formułą $\neg\varphi$, a β_2 jest formułą ψ. Mamy zatem następujące reguły dla implikacji:

$$\begin{array}{c}\boxed{\begin{array}{c}\neg\neg\varphi \\ \vdots \\ \psi\end{array}} \\ \varphi \to \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\boxed{\begin{array}{c}\neg\psi \\ \vdots \\ \neg\varphi\end{array}} \\ \varphi \to \psi\end{array}$$

Reguła z prawej to znana słuchaczom reguła kontrapozycji, natomiast reguła z lewej, wraz z regułą opuszczania podwójnej negacji, pozwala wprowadzić do systemu DN jako regułę wtórną regułę wprowadzania implikacji $\to \mathcal{I}$, o której wspomniano na początku tego tekstu.

Zachęcamy słuchaczy do wypisania w postaci wyraźnej reguł wprowadzania i opuszczania dla kilku dalszych funktorów, np. dla koniunkcji, alternatywy, zaprzeczonej koniunkcji i zaprzeczonej alternatywy.

5 Dowody i wyprowadzenia

Dowodem formuły φ w systemie DN nazywamy dowolny skończony ciąg formuł $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ taki, że formuła φ jest identyczna z formułą ψ_n oraz dla każdego i, jeśli $1 \leqslant i \leqslant n$, to formuła ψ_i jest bądź uchylonym założeniem, bądź powstaje z formuł wcześniejszych w tym ciągu poprzez zastosowanie którejś z reguł systemu.

Jeśli formuła φ ma dowód w systemie DN, to piszemy $\vdash_{DN} \varphi$.

Wyprowadzeniem (derywacją) formuły φ ze zbioru formuł X w systemie DN nazywamy dowolny skończony ciąg formuł $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ taki, że formuła φ jest identyczna z formułą ψ_n oraz dla każdego i, jeśli $1 \leqslant i \leqslant n$, to formuła ψ_i jest bądź uchylonym założeniem, bądź elementem zbioru X, bądź powstaje z formuł wcześniejszych w tym ciągu poprzez zastosowanie którejś z reguł systemu.

Jeśli formuła φ ma wyprowadzenie ze zbioru X w systemie DN, to piszemy $X \vdash_{DN} \varphi$.

6 Przykłady

Pokażemy na kilku przykładach, jak przeprowadzane są dowody w systemie dedukcji naturalnej w przytoczonej stylizacji. Numerujemy poszczególne wiersze dowodów oraz przy każdym wierszu dodajemy komentarz, objaśniający na jakiej podstawie dołączamy ten wiersz do dowodu. Dowody są ciągami formuł, numery i objaśnienia pełnią jedynie rolę pomocniczą. Skrót „zał." oznacza założenie, skrót „z.d.n." założenie dowodu nie wprost.

6.1 Dowód formuły $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

(1)	$p \to (q \to r)$	zał.
(2)	q	zał.
(3)	p	zał.
(4)	$q \to r$	MP: (1), (3)
(5)	r	MP: (4), (2)
(6)	$p \to r$	$\to\mathcal{I}$: (3), (5)
(7)	$q \to (p \to r)$	$\to\mathcal{I}$: (2), (6)
(8)	$(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$	$\to\mathcal{I}$: (1), (7)

W tym przykładzie (1), (2) i (3) są założeniami. Wiersz (4) otrzymujemy z (1) i (3) na mocy *modus ponens* (zwróćmy uwagę, że na tym etapie dowodu formuły (1) i (3) są obie aktywne!). Wiersz (5) otrzymujemy z (2) i (4), również na mocy *modus ponens* (zwróćmy uwagę, że na tym etapie dowodu formuły (2) i (4) są obie aktywne!). Teraz założenie (3) zostaje uchylone (zamykamy pudełko), więc otrzymujemy wiersz (6) (na mocy reguły wprowadzania implikacji). Formuły (3), (4) i (5) przestają być aktywne. Możemy uchylić teraz założenie (2) i otrzymujemy wiersz (7) (na mocy reguły wprowadzania implikacji). Wreszcie, uchylamy założenie (1) i otrzymujemy wiersz (8) (również na mocy reguły wprowadzania implikacji).

6.2 Dowód formuły $p \vee \neg p$

Jeśli formuła, której mamy dowieść nie ma postaci implikacji, to możemy rozpocząć dowód od poczynienia założenia nie wprost:

$$
\begin{array}{l}
\boxed{\begin{array}{lll}
(1) & \neg(p \vee \neg p) & \text{z.d.n} \\
(2) & \neg p & \alpha\mathcal{E}\text{: (1)} \\
(3) & \neg\neg p & \alpha\mathcal{E}\text{: (1)} \\
(4) & \bot & \bot\,\mathcal{I}\text{: (2), (3)}
\end{array}} \\
\quad (5)\ \ p \vee \neg p \quad \neg\mathcal{E}\text{: (1), (4)}
\end{array}
$$

6.3 Dowód formuły $p \to p$

Ten przykład pokazuje, jak wykorzystać regułę RP powtarzania założeń:

$$
\begin{array}{c}
\boxed{\begin{array}{lll}
(1) & p & \text{zał.} \\
(2) & p & \text{RP: (1)}
\end{array}} \\
(3)\ \ p \to p \quad \to\mathcal{I}\text{: (1), (2)}
\end{array}
$$

6.4 Dowód formuły $\neg(p \wedge \neg q) \to (p \to q)$

$$
\begin{array}{c}
\boxed{\begin{array}{c}
(1)\ \ \neg(p \wedge \neg q) \quad \text{zał.} \\
\boxed{\begin{array}{c}
(2)\ \ p \quad \text{zał.} \\
\boxed{\begin{array}{lll}
(3) & \neg q & \text{z.d.n.} \\
(4) & p \wedge \neg q & \alpha\mathcal{I}\text{: (2), (3)} \\
(5) & \bot & \bot\,\mathcal{I}\text{: (1), (4)}
\end{array}} \\
(6)\ \ q \quad \neg\mathcal{E}\text{: (3), (5)}
\end{array}} \\
(7)\ \ p \to q \quad \to\mathcal{I}\text{: (2), (6)}
\end{array}} \\
(8)\ \ \neg(p \wedge \neg q) \to (p \to q) \quad \to\mathcal{I}\text{: (1), (7)}
\end{array}
$$

W tym przykładzie (1), (2) i (3) są założeniami. Wiersz (4) otrzymujemy z (2) i (3) na mocy reguły wprowadzania dla α-formuł (dla koniunkcji). Wiersz (5) otrzymujemy z (1) i (4) na mocy jednej z reguł dla negacji (pierwszej z lewej). Podobnie, wiersz (6) otrzymujemy na mocy innej z reguł dla negacji (trzeciej z lewej), uchylamy jednocześnie założenie (3). Wiersz (7) otrzymujemy z wierszy (2) i (6) na mocy reguły wprowadzania implikacji, uchylamy jednocześnie założenie (2). Wreszcie, wiersz (8) otrzymujemy z wierszy (1) i (7) również na mocy reguły wprowadzania implikacji, uchylamy jednocześnie założenie (1).

6.5 Dowód formuły $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

$$
\begin{array}{c}
\boxed{\begin{array}{c}
(1)\;\; \neg(p \wedge q) \quad \text{zał.} \\
\boxed{\begin{array}{lll}
(2) & \neg\neg p & \text{zał.} \\
(3) & \neg q & \beta\mathcal{E}\text{: (1), (2)}
\end{array}} \\
(4)\;\; \neg p \vee \neg q \quad \beta\mathcal{I}\text{: (2), (3)}
\end{array}} \\
(5)\;\; \neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \quad \rightarrow \mathcal{I} : (1), (4)
\end{array}
$$

Pierwsze założenie to $\neg(p \wedge q)$. Jest to β-formuła. Możemy zastosować regułę opuszczania dla β-formuł, jeżeli poczynimy drugie założenie o postaci β_1, czyli w tym przypadku $\neg\neg p$. Otrzymujemy zatem $\neg q$ z (1) oraz (2). Skoro z $\neg\neg p$ wyprowadziliśmy $\neg q$, to (uchylając założenie (2)) możemy zastosować regułę wprowadzania dla β-formuł, otrzymując $\neg p \vee \neg q$, ponieważ w tym przypadku β-formułą jest $\neg p \vee \neg q$, a $\neg\beta_1$ to $\neg\neg p$, natomiast β_2 to $\neg q$. Możemy teraz uchylić założenie (1) i otrzymać (5) z (1) oraz (4) na mocy reguły wprowadzania dla β-formuł (w tym przypadku dla implikacji).

6.6 Dowód formuły $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \vee q)$

$$
\begin{array}{c}
\boxed{\begin{array}{c}
(1)\;\; \neg p \wedge \neg q \quad \text{zał.} \\
(2)\;\; \neg p \quad \alpha\mathcal{E}\text{: (1)} \\
(3)\;\; \neg q \quad \alpha\mathcal{E}\text{: (1)} \\
\boxed{\begin{array}{lll}
(4) & p \vee q & \text{z.d.n.} \\
(5) & p & \beta\mathcal{E}\text{: (3), (4)} \\
(6) & \perp & \perp\mathcal{I}\text{: (2), (5)}
\end{array}} \\
(7)\;\; \neg(p \vee q) \quad \neg\mathcal{I}\text{: (4), (5)}
\end{array}} \\
(8)\;\; (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \vee q) \quad \rightarrow \mathcal{I} : (1), (8)
\end{array}
$$

Czynimy założenie $\neg p \wedge \neg q$ i chcemy wyprowadzić z tego założenia formułę $\neg(p \vee q)$. Ponieważ $\neg p \wedge \neg q$ jest α-formułą, więc wiersze (2) i (3) otrzymujemy na mocy reguł opuszczania dla α-formuł. Kolejne założenie, czyli formuła $p \vee q$ to *założenie dowodu nie wprost* (można to też uczynić w dwóch krokach, zakładając $\neg\neg(p \vee q)$ i opuszczając następnie podwójną negację): jeśli uda nam się wyprowadzić teraz sprzeczność $\perp$, to będziemy mogli dołączyć do dowodu formułę $\neg(p \vee q)$. Z (3) i (4) otrzymujemy (5) (czyli formułę p), na mocy stosownej reguły dla β-formuł. Wiersz (6) otrzymujemy z (2) oraz (5) na mocy reguły dla negacji (pierwszej z lewej). Założenie (4) zostaje teraz uchylone i otrzymujemy wiersz (7) na mocy stosownej reguły dla negacji (drugiej z lewej). Wreszcie, możemy uchylić założenie (1) i otrzymać wiersz (8) na mocy reguły wprowadzania implikacji.

6.7 Dowód formuły $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

$$\begin{array}{c}\boxed{\begin{array}{c}(1)\ \ p \to q\\ \boxed{\begin{array}{ll}(2) & \neg q\\ (3) & \neg p\end{array}}\\ (4)\ \ \neg q \to \neg p\end{array}}\\ (5)\ \ (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)\end{array}$$

Zachęcam słuchaczy do samodzielnego omówienia poszczególnych kroków powyższego dowodu, czyli wpisania stosownych komentarzy.

6.8 Wtórna reguła wprowadzania alternatywy

Pokażemy, że regułą wyprowadzalną w systemie DN jest reguła wprowadzania alternatywy $\vee\mathcal{I}$:

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$

Aby pokazać, że jest to reguła wyprowadzalna w systemie DN, wystarczy udowodnić, że z założenia φ otrzymać można formułę $\varphi \vee \psi$:

$$\boxed{\begin{array}{c}(1)\ \ \varphi \quad \text{zał.}\\ \boxed{\begin{array}{lll}(2) & \neg(\varphi \vee \psi) & \text{zał.}\\ (3) & \neg\varphi & \alpha\mathcal{E}\text{: (2)}\\ (4) & \bot & \bot\,\mathcal{I}\text{: (1), (3)}\end{array}}\\ (5)\ \ \varphi \vee \psi \quad \neg\mathcal{E}\text{: (2), (5)}\end{array}}$$

Wiersze (1) i (2) są tutaj kolejno czynionymi założeniami. Ponieważ $\neg(\varphi \vee \psi)$ jest α-formułą, więc na mocy reguły opuszczania dla α-formuł otrzymujemy jej składnik α_1, czyli w tym przypadku $\neg\varphi$. Wiersz (4) otrzymujemy z wierszy (1) i (3) na mocy stosownej reguły dla negacji (pierwszej z lewej). Wiersz (5) otrzymujemy również na mocy reguły dla negacji (ostatniej z lewej), po uchyleniu założenia (2). Pokazaliśmy zatem, że jeśli w dowodzie wystąpi formuła φ, to możemy dołączyć do dowodu także formułę $\varphi \vee \psi$, gdzie ψ jest dowolną formułą.

6.9 Dowód formuły $((p \vee q) \to (r \wedge s)) \to ((p \to r) \wedge (q \to s))$

Wykorzystamy w tym dowodzie wtórną regułę wprowadzania alternatywy $\vee\mathcal{I}$. Słuchacze zechcą zwrócić uwagę, że dowody w systemie dedukcji naturalnej budujemy według z góry założonego planu: na początku trzeba mieć pomysł, jak będziemy prowadzić dowód. W interesującym nas przypadku przewidujemy, że:

1. Z założenia $(p \vee q) \to (r \wedge s)$ chcemy wyprowadzić formułę $(p \to r) \wedge (q \to s)$.
2. Aby otrzymać $(p \to r) \wedge (q \to s)$ będziemy potrzebować obu formuł: $p \to r$ i $q \to s$.
3. Aby otrzymać $p \to r$, chcemy z założenia p wyprowadzić r (podobnie w przypadku formuły $q \to s$).
4. Aby z p wyprowadzić r, skorzystamy najpierw z reguły wprowadzania alternatywy, otrzymując $p \vee q$ z p, a następnie skorzystamy z założenia $(p \vee q) \to (r \wedge s)$ i reguły *modus ponens*, otrzymując $r \wedge s$. Wreszcie, z $r \wedge s$ otrzymamy r stosując regułę opuszczania dla α-formuł. Przy założeniu p otrzymamy w ten sposób r, a zatem do dowodu możemy dołączyć implikację $p \to r$.
5. Podobnie, przy założeniu q otrzymamy s, a zatem do dowodu możemy dołączyć implikację $q \to s$.
6. Mając obie implikacje $p \to r$ i $q \to s$, możemy dołączyć do dowodu ich koniunkcję $(p \to r) \wedge (q \to s)$.
7. W ten sposób z poczynionego na początku założenia $(p \vee q) \to (r \wedge s)$ wyprowadziliśmy formułę $(p \to r) \wedge (q \to s)$.
8. Ostatnim krokiem dowodu jest dołączenie formuły $((p \vee q) \to (r \wedge s)) \to ((p \to r) \wedge (q \to s))$, na mocy reguły wprowadzania implikacji.

W postaci symbolicznej, w przyjętej tu stylizacji, dowód rozważanej formuły wygląda zatem następująco (słuchacze zechcą zwrócić uwagę, na których etapach uchylamy poszczególne założenia):

$$
\boxed{\begin{array}{c}
(1)\ \ (p \vee q) \to (r \wedge s) \quad \text{zał.} \\
\boxed{\begin{array}{lll}
(2) & p & \text{zał.} \\
(3) & p \vee q & \vee\mathcal{I}\text{: (2)} \\
(4) & r \wedge s & \text{MP: (1), (3)} \\
(5) & r & \alpha\mathcal{E}\text{: (4)}
\end{array}} \\
(6)\ \ p \to r \quad \to\mathcal{I}\text{: (2), (5)} \\
\boxed{\begin{array}{lll}
(7) & q & \text{zał.} \\
(8) & p \vee q & \vee\mathcal{I}\text{: (7)} \\
(9) & r \wedge s & \text{MP: (1), (8)} \\
(10) & s & \alpha\mathcal{E}\text{: (9)}
\end{array}} \\
(11)\ \ q \to s \quad \to\mathcal{I}\text{: (7), (10)} \\
(12)\ \ (p \to r) \wedge (q \to s) \ \ \alpha\mathcal{I}\text{: (6), (11)}
\end{array}}
$$

$$(13)\ \ ((p \vee q) \to (r \wedge s)) \to ((p \to r) \wedge (q \to s)) \quad \to \mathcal{I} : (1), (12)$$

Powyższy dowód można też przekształcić w dowód nie zawierający reguły wtórnej $\vee\mathcal{I}$, a wykorzystujący jedynie reguły pierwotne systemu. Aby tego dokonać, wystarczy po kroku (2) dodać założenie dowodu nie wprost $\neg(p \vee q)$, co pozwala otrzymać z tego założenia $\neg p$ na mocy reguły $\beta\mathcal{E}$. Wtedy z $\neg p$ oraz wiersza (2) (czyli formuły p) otrzymujemy $\perp$ na mocy reguły $\perp\mathcal{I}$. Możemy teraz uchylić założenie dowodu nie wprost $\neg(p \vee q)$ i wprowadzić do dowodu wiersz (3) na mocy reguły $\neg\mathcal{E}$. Podobnie możemy wyeliminować zastosowanie reguły $\vee\mathcal{I}$ w przejściu od wiersza (7) do wiersza (8).

6.10 Dowód formuły $((p \to r) \wedge (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r)$

(1)	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	zał.
(2)	$p \to r$	$\alpha\mathcal{E}$: (1)
(3)	$q \to r$	$\alpha\mathcal{E}$: (1)
(4)	$p \vee q$	zał.
(5)	$\neg r$	z.d.n.
(6)	$\neg p$	MT: (1), (5)
(7)	$\neg q$	MT: (3), (5)
(8)	q	$\beta\mathcal{E}$: (4), (7)
(9)	$\perp$	$\perp\mathcal{I}$: (7), (8)
(10)	r	$\neg\mathcal{E}$: (5), (9)
(11)	$(p \vee q) \to r$	$\to\mathcal{I}$: (4), (10)
(12)	$((p \to r) \wedge (q \to r)) \to ((p \vee q) \to r)$	$\to\mathcal{I}$: (1), (11)

Rozważana formuła to *prawo dodawania poprzedników*, które słuchacze z pewnością poznali w trakcie poprzednich wykładów z logiki. Prawo to wykorzystywane jest w dowodach przez rozpatrzenie przypadków (w stylizacji dowodów założeniowych w systemie Słupeckiego-Borkowskiego nazywanych *dowodami rozgałęzionymi*).

6.11 Dowód formuły $((p \to q) \land (r \to s)) \to ((p \lor r) \to (q \lor s))$

(1)	$(p \to q) \land (r \to s)$	zał.
(2)	$p \to q$	$\alpha\mathcal{E}$: (1)
(3)	$r \to s$	$\alpha\mathcal{E}$: (1)
(4)	$p \lor r$	zał.
(5)	$\neg(q \lor s)$	z.d.n.
(6)	$\neg q$	$\alpha\mathcal{E}$: (5)
(7)	$\neg s$	$\alpha\mathcal{E}$: (5)
(8)	$\neg p$	MT: (2), (6)
(9)	r	$\beta\mathcal{E}$: (4), (8)
(10)	$\neg r$	MT: (3), (7)
(11)	$\perp$	$\perp\mathcal{I}$: (9), (10)
(12)	$q \lor s$	$\neg\mathcal{E}$: (5), (11)
(13)	$(p \lor r) \to (q \lor s)$	$\to\mathcal{I}$: (4), (12)
(14)	$((p \to q) \land (r \to s)) \to ((p \lor r) \to (q \lor s))$	$\to\mathcal{I}$: (1), (13)

6.12 Ekonomista telewizyjny

Milion samochodów elektrycznych, trzy miliony mieszkań, 50 miliardów zł na wsparcie biznesu, gigantyczny port lotniczy, itp. W bajkowych scenariuszach politycznych i ekonomicznych zdarzają się jednak wpadki logiczne. Rozważmy następujący tekst, który mógłby pojawić się w prasie lub w telewizji (upraszczam stylistykę):

Jest kapitalizm lub nie ma bezrobocia. Jeśli jest recesja, to jest też bezrobocie. Nie ma jednak jednocześnie: biedy i braku recesji. Jest bieda, a nie ma kapitalizmu.

Każde z powyższych zdań z osobna brzmi sensownie. Pokażemy jednak, że jako całość jest to tekst sprzeczny. Będzie to zatem przykład wyprowadzenia (derywacji) sprzeczności $\perp$ z formuł odpowiadających powyższym zdaniom. W wyprowadzeniach formuł ze zbioru formuł w systemie DN możemy korzystać z poszczególnych formuł rozważanego zbioru jako założeń, przy czym nie ma potrzeby uchylania tych założeń.

W powyższym tekście mamy następujące zdania proste, które reprezentujemy przez zmienne zdaniowe:

p: Jest kapitalizm.

q: Jest bezrobocie.

r: Jest recesja.

s: Jest bieda.

Struktura logiczna zdań rozważanego tekstu jest następująca:

$p \vee \neg q$

$r \to q$

$\neg(s \wedge \neg r)$

$s \wedge \neg p$

Sprzeczność wyprowadzić możemy z tych formuł np. w następujący sposób (dodajemy kolumnę komentarzy, pokazujących jak tworzone są kolejne wiersze):

(1)	$p \vee \neg q$	założenie
(2)	$r \to q$	założenie
(3)	$\neg(s \wedge \neg r)$	założenie
(4)	$s \wedge \neg p$	założenie
(5)	s	$\alpha\mathcal{E}$: (5)
(6)	$\neg p$	$\alpha\mathcal{E}$: (5)
(7)	$\neg q$	$\beta\mathcal{E}$: (1), (6)
(8)	$\neg r$	MP: (2), (7)
(9)	$s \wedge \neg r$	$\alpha\mathcal{I}$: (5), (8)
(10)	$\bot$	$\bot\,\mathcal{I}$: (3), (9)

Zachęcam słuchaczy do znalezienia innego jeszcze wyprowadzenia sprzeczności ze zbioru rozważanych formuł.

Dla relaksu i refleksji zachęcam do wysłuchania piosenki Andrzeja Sikorowskiego *Jak kapitalizm, to kapitalizm* z koncertu z okazji trzydziestolecia powstania *Solidarności* (dostępna na Youtube):

https://www.youtube.com/watch?v=z2ixz9PzLW4

6.13 Teodycea w czasach Zarazy

Podamy jeszcze jeden przykład wyprowadzenia formuły ze zbioru formuł w systemie DN. Rozważmy tekst:

> *Bóg jest miłosierny, o ile jest doskonały. Jeśli Bóg jest doskonały i stworzył Świat, to w Świecie nie ma Zła. Jednak w Świecie jest Zło. Ponadto, Bóg przecież stworzył Świat.*

Pokażemy, że akceptacja powyższych założeń zmusza do przyjęcia wniosku: *Bóg nie jest doskonały lub nie jest miłosierny.* Dowód będzie polegał na wyprowadzeniu tego zdania z podanych wyżej zdań.

W powyższym tekście mamy następujące zdania proste, które reprezentujemy przez zmienne zdaniowe:

p: Bóg jest doskonały.

q: Bóg jest miłosierny.

r: Bóg stworzył Świat.

s: W Świecie jest Zło.

Struktura logiczna zdań rozważanego tekstu jest następująca:

$p \to q$

$(p \wedge r) \to \neg s$

s

r

Pokażemy, że z tego zbioru formuł wyprowadzić można w systemie DN formułę: $\neg p \vee \neg q$.

(1)	$p \to q$		założenie
(2)	$(p \wedge r) \to \neg s$		założenie
(3)	s		założenie
(4)	r		założenie
(5)	$\neg\neg s$		$\neg\neg\mathcal{I}$: (3)
(6)	$\neg(p \wedge r)$		MT: (2), (5)
(7)	$\neg\neg r$		$\neg\neg\mathcal{I}$: (4)
(8)	$\neg p$		$\beta\mathcal{E}$: (6), (7)
	(9) $\neg(\neg p \vee \neg q)$	z.d.n.	
	(10) $\neg\neg p$	$\alpha\mathcal{E}$: (9)	
	(11) $\perp$	$\perp\mathcal{I}$: (8), (10)	
(12)	$\neg p \vee \neg q$		$\neg\mathcal{E}$: (9), (11)

Zauważmy, że w tym wyprowadzeniu w ogóle nie korzystaliśmy z pierwszego założenia, które miłosierdzie boże traktowało jako jeden z aspektów bożej doskonałości. Jak pisał jeden z polskich filozofów: *ile jest w budyniu kości, tyle w Bogu jest litości*. Za *Zło* możemy wstawić np. *Zagładę* lub *Zarazę*.

Inne wyprowadzenie zaproponowała Pani prof. Dorota Leszczyńska-Jasion:

(1) $p \to q$ zał.
(2) $p \wedge r \to \neg s$ zał.
(3) s zał.
(4) r zał.

(5)	$\neg\neg q$	zał.
(6)	$\neg\neg s$	$\neg\neg\mathcal{I}$: (3)
(7)	$\neg(p \wedge r)$	$\beta\mathcal{E}$: (2),(6)
(8)	$\neg\neg r$	$\neg\neg\mathcal{I}$: (4)
(9)	$\neg p$	$\beta\mathcal{E}$: (7),(8)

(10) $\neg p \vee \neg q$ $\beta\mathcal{I}$: (5),(9)

7 Trafność i pełność

W książce Fittinga podano zarys dowodu trafności systemu DN, odwołujący się do trafności systemu aksjomatycznego klasycznego rachunku zdań (Fitting 1990, 81).

Pełność systemu DN wykazać można wykorzystując następujące pojęcie. Jeśli φ jest dowolną formułą, a X zbiorem formuł języka klasycznego rachunku zdań, to powiemy, że X jest zbiorem DN-sprzecznym, jeżeli $X \vdash_{DN} \varphi$. Zbiory, które nie są DN-sprzeczne, nazywamy DN-niesprzecznymi. Można pokazać, że rodzina wszystkich zbiorów DN-niesprzecznych jest zdaniową własnością niesprzeczności (poprzez sprawdzenie, że zachodzą wszystkie warunki definiujące zdaniowe własności niesprzeczności). Ten fakt wykorzystuje się dla udowodnienia, że każda tautologia klasycznego rachunku zdań jest też tezą systemu DN (czyli posiada dowód w systemie DN). Można udowodnić również, że jeśli φ jest logiczną konsekwencją X, to φ ma wyprowadzenie z X w systemie DN, dla dowolnych X oraz φ.

8 Dedukcja naturalna w logice pierwszego rzędu

W książce Fitting 1990 system DN zostaje rozszerzony do systemu dedukcji naturalnej dla logiki pierwszego rzędu poprzez dodanie do reguł pierwotnych systemu DN dwóch reguł opuszczania dla kwantyfikatorów ($\gamma\mathcal{E}$ dla formuł typu γ, czyli generalnie skwantyfikowanych oraz $\delta\mathcal{E}$ formuł typu δ, czyli egzystencjalnie skwantyfikowanych):

$$\frac{\gamma}{\gamma(t)} \qquad \frac{\delta}{\delta(a)}$$

W regule dla formuł typu γ term t jest dowolnym termem zamkniętym, natomiast w regule dla formuł typu δ stała indywidualna a jest nową stałą, która nie wystąpiła dotąd w odnośnym wyprowadzeniu.

Pojęcia dowodu i wyprowadzenia w systemie DN dla logiki pierwszego rzędu definiujemy tak samo, jak odpowiednie pojęcia w systemie DN dla klasycznego rachunku zdań, pamiętając jednak, że mamy teraz dodatkowe dwie reguły dla formuł z kwantyfikatorami:

Dowodem formuły φ w systemie DN (dla logiki pierwszego rzędu) nazywamy dowolny skończony ciąg formuł $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ taki, że formuła φ jest identyczna z formułą ψ_n oraz dla każdego i, jeśli $1 \leqslant i \leqslant n$, to formuła ψ_i jest bądź uchylonym założeniem, bądź powstaje z formuł wcześniejszych w tym ciągu poprzez zastosowanie którejś z reguł systemu.

Wyprowadzeniem (derywacją) formuły φ ze zbioru formuł X w systemie DN (dla logiki pierwszego rzędu) nazywamy dowolny skończony ciąg formuł $\psi_1, \psi_2, \ldots,$ ψ_n taki, że formuła φ jest identyczna z formułą ψ_n oraz dla każdego i, jeśli $1 \leqslant i \leqslant n$, to formuła ψ_i jest bądź uchylonym założeniem, bądź elementem zbioru X, bądź powstaje z formuł wcześniejszych w tym ciągu poprzez zastosowanie którejś z reguł systemu.

System DN dla logiki pierwszego rzędu jest trafny i pełny.

Książka Fitting 1990 ogranicza się do jednego przykładu dowodu w systemie DN dla logiki pierwszego rzędu (Fitting 1990, 137), a mianowicie do dowodu formuły: $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$:

$(1)\ \forall x(P(x) \to Q(x))$ zał.

$(2)\ \forall x P(x)$ zał.

(3)	$\neg\forall x Q(x)$	z.d.n.
(4)	$\neg Q(a)$	$\delta\mathcal{E}$: (3)
(5)	$P(a)$	$\gamma\mathcal{E}$: (2)
(6)	$P(a) \to Q(a)$	$\gamma\mathcal{E}$: (1)
(7)	$Q(a)$	MP: (5), (6)
(8)	$\bot$	$\bot\ \mathcal{I}$: (4), (7)

$(9)\ \forall x Q(x)$ $\neg\mathcal{E}$: (3), (8)

$(10)\ \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$ $\to \mathcal{I}$: (2), (9)

$(11)\ \forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$ $\to \mathcal{I}$: (1), (10)

W tym przykładzie (1), (2) oraz (3) są kolejno czynionymi założeniami. Wiersz (4) otrzymujemy z wiersza (3) na mocy reguły opuszczania kwantyfikatora egzystencjalnego (pamiętamy, że formuła z zaprzeczonym kwantyfikatorem generalnym „zachowuje się" tak samo, jak formuła egzystencjalna), gdzie a jest nową stałą indywidualną. Wiersz (5) otrzymujemy z (2) przez zastosowanie reguły opuszczania kwantyfikatora ogólnego, na mocy tej samej reguły otrzymujemy wiersz (6) z wiersza (1). Wiersz (7) otrzymujemy z wierszy (5) oraz (6) na mocy reguły *modus ponens*. Wiersz (8) otrzymujemy z wierszy (4) i (7) na mocy stosownej (pierwszej od lewej w podanych wyżej regułach) reguły dla negacji. Podobnie, wiersz (9) otrzymujemy na mocy reguły dla negacji (trzeciej od lewej w podanych wyżej regułach). Wiersze (10) oraz (11) otrzymujemy na mocy reguły wprowadzania dla β-formuł (w obu tych przypadkach dla implikacji). Na koniec zauważmy, że wszystkie założenia poczynione na poszczególnych etapach dowodu zostały uchylone, a więc istotnie mamy do czynienia z dowodem formuły (11) w systemie DN dla logiki pierwszego rzędu.

Pani prof. Dorota Leszczyńska-Jasion przedstawiła inny dowód powyższej formuły, rozpoczynający się od założenia dowodu nie wprost:

(1)	$\neg(\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x)))$	z.d.n.
(2)	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	$\alpha\mathcal{E}$: (1)
(3)	$\neg(\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$	$\alpha\mathcal{E}$: (1)
(4)	$\forall x P(x)$	$\alpha\mathcal{E}$: (3)
(5)	$\neg(\forall x Q(x))$	$\alpha\mathcal{E}$: (3)
(6)	$\neg Q(a)$	$\delta\mathcal{E}$: (5)
(7)	$P(a) \to Q(a)$	$\gamma\mathcal{E}$: (2)
(8)	$P(a)$	$\gamma\mathcal{E}$: (4)
(9)	$\neg P(a)$	$\beta\mathcal{E}$: (7),(6)
(10)	$\bot$	$\bot\mathcal{I}$: (8),(9)
(11)	$\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$	$\neg\mathcal{E}$: (1),(10)

Jeszcze jeden przykład opracowany przez Panią prof. Dorotę Leszczyńską-Jasion, również zaczynający się od założenia nie wprost:

(1)	$\neg(\exists x(P(x) \to \forall x P(x)))$	z.d.n.
(2)	$\neg(P(a) \to \forall x P(x))$	$\gamma\mathcal{E}$: (1)
(3)	$P(a)$	$\alpha\mathcal{E}$: (2)
(4)	$\neg\forall x P(x)$	$\alpha\mathcal{E}$: (2)
(5)	$\neg P(b)$	$\delta\mathcal{E}$: (4)
(6)	$\neg(P(b) \to \forall x P(x))$	$\gamma\mathcal{E}$: (1)
(7)	$P(b)$	$\alpha\mathcal{E}$: (6)
(8)	$\bot$	$\bot\mathcal{I}$: (5),(7)
(9)	$\exists x(P(x) \to \forall x P(x))$	$\neg\mathcal{E}$: (1), (8)

Zachęcam słuchaczy do porównania tych dwóch ostatnich dowodów z dowodami przeprowadzanymi metodą tablic analitycznych.

Literatura

Fitting, M. 1990. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*. Springer, Berlin.

Słupecki, J., Borkowski, L. 1966. *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl