

Logika, II rok Etnolingwistyki UAM, 20 VI 2008.

Imię i Nazwisko: .....

GRUPA: I

**Wybierz cztery z poniższych pięciu zadań. Poprawne rozwiązanie dwóch zadań oznacza zdany egzamin.**

1. Które ze zdań (a), (b) wynika logicznie ze zdania: *Drink jest wstrząśnięty, ale nie jest zmieszany?*

- (a) *Drink nie jest zmieszany, o ile jest wstrząśnięty.*
- (b) *Jeśli drink nie jest zmieszany, to nie jest wstrząśnięty.*

W każdym przypadku uzasadnij odpowiedź.

2. Pokaż, że jest tezą systemu założeniowego KRZ:

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q).$$

3. Przypuśćmy, że *falszywe są zdania:*

*Nie wszystkie Pierzaste są Myszaste. Wśród Myszastych są Ogoniaste. Ogoniastych nie ma.*

Co można wtedy *prawdziwie* powiedzieć o związkach między Pierzastymi i Ogoniastymi?

4. Sformułuj następujące prawa KRZ:

- (a) *modus (ponendo) ponens*
- (b) De Morgana dla koniunkcji
- (c) komutacji.

5. Podaj przykład uniwersum oraz interpretacji w nim predykatów  $P$  oraz  $Q$  takich, że fałszywe jest przy tej interpretacji następujące zdanie:

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)).$$

PISZ WYRAŻNIE.

JASNO FORMUŁUJ CZYNIONE ZAŁOŻENIA.

ODPOWIEDZI PODAWAJ W FORMIE PEŁNEGO ZDANIA.

JERZY POGONOWSKI  
Zakład Logiki Stosowanej UAM  
www.logic.amu.edu.pl

Logika, II rok Etnolingwistyki UAM, 20 VI 2008.

Imię i Nazwisko: .....

GRUPA: II

**Wybierz cztery z poniższych pięciu zadań. Poprawne rozwiązanie dwóch zadań oznacza zdany egzamin.**

1. Które ze zdań (a), (b) wynika logicznie ze zdania: *Drink jest wstrząśnięty, ale nie jest zmieszany?*

- (a) *Drink jest zmieszany, o ile nie jest wstrząśnięty.*
- (b) *Drink jest zmieszany dokładnie wtedy, gdy jest wstrząśnięty.*

W każdym przypadku uzasadnij odpowiedź.

2. Pokaż, że jest tezą systemu założeniowego KRZ:

$$((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r).$$

3. Przypuśćmy, że *falszywe są zdania:*

*Nie wszystkie Myszaste są Ogoniaste. Pewien Pierzasty jest Ogoniasty. Nie ma Myszastych.*

Co można wtedy *prawdziwie* powiedzieć o związkach między Myszastymi i Pierzastymi?

4. Sformułuj następujące prawa KRZ:

- (a) *modus (tollendo) tollens*
- (b) De Morgana dla alternatywy
- (c) dodawania poprzedników.

5. Podaj przykład uniwersum oraz interpretacji w nim predykatów  $P$  oraz  $Q$  takich, że fałszywe jest przy tej interpretacji następujące zdanie:

$$(\exists x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)).$$

PISZ WYRAŻNIE.

JASNO FORMUŁUJ CZYNIONE ZAŁOŻENIA.

ODPOWIEDZI PODAWAJ W FORMIE PEŁNEGO ZDANIA.

JERZY POGONOWSKI  
Zakład Logiki Stosowanej UAM  
www.logic.amu.edu.pl

**Wybierz cztery z poniższych pięciu zadań. Poprawne rozwiązanie dwóch zadań oznacza zdany egzamin.**

1. Które ze zdań (a), (b) wynika logicznie ze zdania: *Drink jest wstrząśnięty, ale nie jest zmieszany?*

- (a) *Jeśli drink nie jest wstrząśnięty, to nie jest zmieszany.*
- (b) *Drink jest zmieszany, o ile jest wstrząśnięty.*

W każdym przypadku uzasadnij odpowiedź.

2. Pokaż, że jest tezą systemu założeniowego KRZ:

$$((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r).$$

3. Przypuśćmy, że *fałszywe są zdania:*

*Nie wszystkie Myszaste są Pierzaste. Pewien Pierzasty nie jest Ogoniasty. Myszastych nie ma.*

Co można wtedy *prawdziwie* powiedzieć o związkach między Myszastymi i Ogoniastymi?

4. Sformułuj następujące prawa KRZ:

- (a) sylogizmu hipotetycznego (bezkoniunkcyjne)
- (b) zaprzeczenia implikacji
- (c) mnożenia następników.

5. Podaj przykład uniwersum oraz interpretacji w nim predykatów  $P$  oraz  $Q$  takich, że fałszywe jest przy tej interpretacji następujące zdanie:

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x)).$$

**PISZ WYRAŻNIE.**

**JASNO FORMUŁUJ CZYNIONE ZAŁOŻENIA.**

**ODPOWIEDZI PODAWAJ W FORMIE PEŁNEGO ZDANIA.**

## Rozwiązania

GRUPA: I

1. Niech:

- zmienna zdaniowa  $p$  zastępuje zdanie *Drink jest wstrząśnięty*
- zmienna zdaniowa  $q$  zastępuje zdanie *Drink jest zmieszany*.

Wtedy zdaniu złożonemu *Drink jest wstrząśnięty, ale nie zmieszany* odpowiada formuła  $p \wedge \neg q$ . Ta formuła przyjmuje wartość 1 dokładnie wtedy, gdy  $p$  ma wartość 1, a  $q$  ma wartość 0. Ponadto:

- (a) zdaniu *Drink jest nie zmieszany, o ile jest wstrząśnięty* odpowiada formuła  $p \rightarrow \neg q$ ,
- (b) zdaniu *Jeśli drink nie jest zmieszany, to nie jest wstrząśnięty* odpowiada formuła  $\neg q \rightarrow \neg p$ .

Wystarczy zatem sprawdzić, czy któraś z formuł (a), (b) przyjmuje wartość 0 wtedy, gdy  $p \wedge \neg q$  przyjmuje wartość 1. Pamiętajmy: formuła  $\beta$  wynika logicznie z formuły  $\alpha$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\beta$  przyjmuje wartość 1 przy każdym wartościowaniu, przy którym  $\alpha$  przyjmuje wartość 1.

Dla  $p = 1$  oraz  $q = 0$  mamy:

- formuła  $p \rightarrow \neg q$  ma wartość 1,
- formuła  $\neg q \rightarrow \neg p$  ma wartość 0.

Widzimy zatem, że:

- Formuła  $p \rightarrow \neg q$  wynika logicznie z formuły  $p \wedge \neg q$ .
- Formuła  $\neg q \rightarrow \neg p$  nie wynika logicznie z formuły  $p \wedge \neg q$ .

2. Budujemy dowód założeniowy nie wprost:

1.  $(p \wedge q) \rightarrow r$  założenie
2.  $p \wedge \neg r$  założenie
3.  $\neg \neg q$  z.d.n.
4.  $q$  ON: 3
5.  $p$  OK: 2
6.  $\neg r$  OK: 2
7.  $p \wedge q$  DK: 5,4
8.  $r$  RO: 1,7
9.  $\perp$  sprzeczność: 6,8.

Uzyskanie sprzeczności kończy dowód nie wprost podanej formuły.

3. Wprowadźmy oznaczenia:

- $P(x)$  —  $x$  jest Pierzasty
- $M(x)$  —  $x$  jest Myszasty
- $O(x)$  —  $x$  jest Ogoniasty.

Z założenia, fałszywe są zdania:

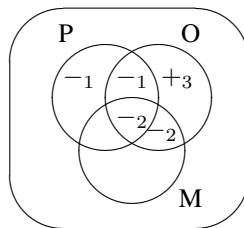
- $\neg\forall x (P(x) \rightarrow M(x))$
- $\exists x (M(x) \wedge O(x))$
- $\neg\exists x O(x)$ .

A zatem prawdziwe są zdania:

- (1)  $\forall x (P(x) \rightarrow M(x))$
- (2)  $\neg\exists x (M(x) \wedge O(x))$
- (3)  $\exists x O(x)$ .

Rysujemy diagram Venna dla trzech zbiorów (denotacji predykatów  $P$ ,  $M$  i  $O$ ) i zaznaczamy minusem obszary puste, a plusem obszary niepuste. Przy tym:

- najpierw zaznaczamy, które obszary są puste
- indeksy wskazują, na podstawie którego zdania umieszczamy informację na diagramie.



Z powyższego rysunku widać, że o związkach między Pierzastymi oraz Ogoniastymi da się prawdziwie powiedzieć, co następuje:

- *Żaden Pierzasty nie jest Ogoniasty:*  $\neg\exists x (P(x) \wedge O(x))$ .
- *Nie wszystkie Ogoniaste są Pierzaste:*  $\neg\forall x (O(x) \rightarrow P(x))$ .

4.

- (a)  $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
- (b)  $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$
- (c)  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow r)$ .

5. Zdanie  $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$  jest implikacją. Trzeba więc tak dobrać uniwersum oraz interpretację w nim predykatów  $P$  i  $Q$ , aby poprzednik tej implikacji był prawdziwy, a jej następnik fałszywy.

Niech uniwersum będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i przyjmijmy następującą interpretację dla  $P$  i  $Q$ :

- $P(x) \text{ — } x \leq x$
- $Q(x) \text{ — } x < x$ .

Wtedy poprzednik naszej implikacji przyjmuje postać:

$$\forall x (x \leq x \vee x < x)$$

i jest niewątpliwie prawdziwy w uniwersum liczb naturalnych. Następnik naszej implikacji też jest implikacją i ma teraz postać:

$$\forall x x \leq x \rightarrow \forall x x < x.$$

Jej poprzednik jest oczywiście prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Stąd i cała ta implikacja jest fałszywa. Wreszcie, rozważana na początku implikacja także jest fałszywa w tej interpretacji.

## 1. Niech:

- zmienna zdaniowa  $p$  zastępuje zdanie *Drink jest wstrząśnięty*
- zmienna zdaniowa  $q$  zastępuje zdanie *Drink jest zmieszany*.

Wtedy zdaniu złożonemu *Drink jest wstrząśnięty, ale nie zmieszany* odpowiada formuła  $p \wedge \neg q$ . Ta formuła przyjmuje wartość 1 dokładnie wtedy, gdy  $p$  ma wartość 1, a  $q$  ma wartość 0. Ponadto:

- (a) zdaniu *Drink jest zmieszany, o ile nie jest wstrząśnięty* odpowiada formuła  $\neg p \rightarrow q$ ,
- (b) zdaniu *Drink jest zmieszany dokładnie wtedy, gdy jest wstrząśnięty* odpowiada formuła  $q \equiv p$ .

Wystarczy zatem sprawdzić, czy któraś z formuł (a), (b) przyjmuje wartość 0 wtedy, gdy  $p \wedge \neg q$  przyjmuje wartość 1. Pamiętajmy: formuła  $\beta$  wynika logicznie z formuły  $\alpha$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\beta$  przyjmuje wartość 1 przy każdym wartościowaniu, przy którym  $\alpha$  przyjmuje wartość 1.

Dla  $p = 1$  oraz  $q = 0$  mamy:

- formuła  $\neg p \rightarrow q$  ma wartość 1,
- formuła  $q \equiv p$  ma wartość 0.

Widzimy zatem, że:

- Formuła  $\neg p \rightarrow q$  wynika logicznie z formuły  $p \wedge \neg q$ .
- Formuła  $q \equiv p$  nie wynika logicznie z formuły  $p \wedge \neg q$ .

## 2. Budujemy dowód założeniowy nie wprost:

- |    |  |                   |
|----|--|-------------------|
| 1. | $(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q$ | założenie         |
| 2. | $p \wedge q$                           | założenie         |
| 3. | $\neg r$                               | z.d.n.            |
| 4. | $p$                                    | OK: 2             |
| 5. | $p \wedge \neg r$                      | DK: 4,3           |
| 6. | $\neg q$                               | RO: 1,5           |
| 7. | $q$                                    | OK: 2             |
| 8. | $\perp$                                | sprzeczność: 6,7. |

Uzyskanie sprzeczności kończy dowód nie wprost podanej formuły.

## 3. Wprowadźmy oznaczenia:

- $P(x)$  —  $x$  jest Pierzasty
- $M(x)$  —  $x$  jest Myszasty
- $O(x)$  —  $x$  jest Ogoniasty.

Z założenia, fałszywe są zdania:

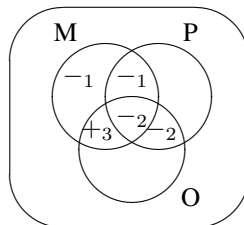
- $\neg \forall x (M(x) \rightarrow O(x))$
- $\exists x (P(x) \wedge O(x))$
- $\neg \exists x M(x)$ .

A zatem prawdziwe są zdania:

- (1)  $\forall x (M(x) \rightarrow O(x))$
- (2)  $\neg \exists x (P(x) \wedge O(x))$
- (3)  $\exists x M(x)$ .

Rysujemy diagram Venna dla trzech zbiorów (denotacji predykatów  $P$ ,  $M$  i  $O$ ) i zaznaczamy minusem obszary puste, a plusem obszary niepuste. Przy tym:

- najpierw zaznaczamy, które obszary są puste
- indeksy wskazują, na podstawie którego zdania umieszczamy informację na diagramie.



Z powyższego rysunku widać, że o związkach między Myszastymi oraz Pierzastymi da się prawdziwie powiedzieć, co następuje:

- Żaden Myszasty nie jest Pierzasty:  $\neg \exists x (M(x) \wedge P(x))$ .
- Nie wszystkie Myszaste są Pierzaste:  $\neg \forall x (M(x) \rightarrow P(x))$ .



4.

- (a)  $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
- (b)  $\neg(p \vee q) \equiv (\neg q \wedge \neg p)$
- (c)  $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$ .

5. Zdanie  $(\exists x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$  jest implikacją. Trzeba więc tak dobrać uniwersum oraz interpretację w nim predykatów  $P$  i  $Q$ , aby poprzednik tej implikacji był prawdziwy, a jej następnik fałszywy.

Niech uniwersum będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i przyjmijmy następującą interpretację dla  $P$  i  $Q$ :

- $P(x) \text{ — } x < 10$
- $Q(x) \text{ — } x < 20$ .

Ze względu na znane ze szkoły prawo trychotomii mamy:

- $\neg Q(x) \text{ — } x \geq 20$ .

Wtedy poprzednik naszej implikacji przyjmuje postać:

$$\exists x x < 10 \wedge \exists x x \geq 20$$

i jest oczywiście prawdziwy w podanej interpretacji. Natomiast następnik naszej implikacji przyjmuje postać:

$$\exists x (x < 10 \wedge x \geq 20)$$

i jest, rzecz jasna, fałszywy w podanej interpretacji. Stąd także cała rozważana na początku implikacja jest fałszywa.

## 1. Niech:

- zmienna zdaniowa  $p$  zastępuje zdanie *Drink jest wstrząśnięty*
- zmienna zdaniowa  $q$  zastępuje zdanie *Drink jest zmieszany*.

Wtedy zdaniu złożonemu *Drink jest wstrząśnięty, ale nie zmieszany* odpowiada formuła  $p \wedge \neg q$ . Ta formuła przyjmuje wartość 1 dokładnie wtedy, gdy  $p$  ma wartość 1, a  $q$  ma wartość 0. Ponadto:

- (a) zdaniu *Jeśli drink nie jest wstrząśnięty, to nie jest zmieszany* odpowiada formuła  $\neg p \rightarrow \neg q$ ,
- (b) zdaniu *Drink jest zmieszany, o ile jest wstrząśnięty* odpowiada formuła  $p \rightarrow q$ .

Wystarczy zatem sprawdzić, czy któraś z formuł (a), (b) przyjmuje wartość 0 wtedy, gdy  $p \wedge \neg q$  przyjmuje wartość 1. Pamiętajmy: formuła  $\beta$  wynika logicznie z formuły  $\alpha$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\beta$  przyjmuje wartość 1 przy każdym wartościowaniu, przy którym  $\alpha$  przyjmuje wartość 1.

Dla  $p = 1$  oraz  $q = 0$  mamy:

- formuła  $\neg p \rightarrow \neg q$  ma wartość 1,
- formuła  $p \rightarrow q$  ma wartość 0.

Widzimy zatem, że:

- Formuła  $\neg p \rightarrow \neg q$  wynika logicznie z formuły  $p \wedge \neg q$ .
- Formuła  $p \rightarrow q$  nie wynika logicznie z formuły  $p \wedge \neg q$ .

## 2. Budujemy dowód założeniowy nie wprost:

- |    |  |                   |
|----|--|-------------------|
| 1. | $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ | założenie         |
| 2. | $p \vee q$                                   | założenie         |
| 3. | $\neg r$                                     | z.d.n.            |
| 4. | $p \rightarrow r$                            | OK: 1             |
| 5. | $q \rightarrow r$                            | OK: 1             |
| 6. | $\neg p$                                     | MT: 4,3           |
| 7. | $\neg q$                                     | MT: 5,3           |
| 8. | $q$  | OA: 2,6           |
| 9. | $\perp$                                      | sprzeczność: 7,8. |

Uzyskanie sprzeczności kończy dowód nie wprost podanej formuły.

## 3. Wprowadźmy oznaczenia:

- $P(x)$  —  $x$  jest Pierzasty
- $M(x)$  —  $x$  jest Myszasty
- $O(x)$  —  $x$  jest Ogoniasty.

Z założenia, fałszywe są zdania:

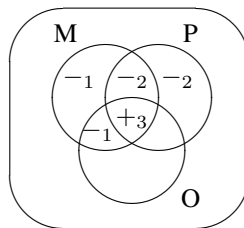
- $\neg\forall x (M(x) \rightarrow P(x))$
- $\exists x (P(x) \wedge \neg O(x))$  (co jest równoważne z:  $\neg\forall x (P(x) \rightarrow O(x))$ )
- $\neg\exists x M(x)$ .

A zatem prawdziwe są zdania:

- (1)  $\forall x (M(x) \rightarrow P(x))$
- (2)  $\neg\exists x (P(x) \wedge \neg O(x))$  (co jest równoważne z:  $\forall x (P(x) \rightarrow O(x))$ )
- (3)  $\exists x M(x)$ .

Rysujemy diagram Venna dla trzech zbiorów (denotacji predykatów  $P$ ,  $M$  i  $O$ ) i zaznaczamy minusem obszary puste, a plusem obszary niepuste. Przy tym:

- najpierw zaznaczamy, które obszary są puste
- indeksy wskazują, na podstawie którego zdania umieszczamy informację na diagramie.



Z powyższego rysunku widać, że o związkach między Myszastymi oraz Ogoniastymi da się prawdziwie powiedzieć, co następuje:

- *Wśród Myszastych są Ogoniaste:*  $\exists x (M(x) \wedge O(x))$ .
- *Wszystkie Myszaste są Ogoniaste:*  $\forall x (M(x) \rightarrow O(x))$ .

4.

- (a)  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- (b)  $\neg(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$
- (c)  $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$ .

5. Zdanie  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$  jest implikacją. Trzeba więc tak dobrać uniwersum oraz interpretację w nim predykatów  $P$  i  $Q$ , aby poprzednik tej implikacji był prawdziwy, a jej następnik fałszywy.

Niech uniwersum będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych i przyjmijmy następującą interpretację dla  $P$  i  $Q$ :

- $P(x)$  —  $x$  jest podzielna bez reszty przez 4
- $Q(x)$  —  $x$  jest podzielna bez reszty przez 2.

Wtedy poprzednik naszej implikacji przyjmuje postać:

*Każda liczba podzielna bez reszty przez 4 jest też podzielna bez reszty przez 2.*

$i$  jest oczywiście prawdziwy w podanej interpretacji. Natomiast następnik naszej implikacji przyjmuje postać:

*Każda liczba jest podzielna bez reszty przez 4 oraz jest podzielna bez reszty przez 2.*

$i$  jest oczywiście fałszywy w podanej interpretacji. A zatem  $i$  podana na początku implikacja jest fałszywa w tej interpretacji.