Egzamin z Logiki Matematycznej

Językoznawstwo i Informacja Naukowa UAM

Prawidłowe rozwiązania zadań

Szanowni Państwo, tj. Drogie Dzieci,

załączam prawidłowe rozwiązania zadań z dzisiejszego egzaminu. Oczywiście, Nie Było Zakazu, aby zadania te rozwiązywać innymi jeszcze metodami, byle poprawnymi.

Zgodnie z ustaleniami, wpisywanie ocen — w środę, 15 czerwca 2005 roku od 12:30 do 13:30 w Zakładzie Logiki Stosowanej UAM na Waszej ulubionej Międzychodzkiej.

Jerzy Pogonowski 13 czerwca 2005

Dopisek z 14 czerwca 2005: sprawdziłem wczoraj Wasze prace. W pierwszym odruchu chciałem postąpić wedle zalecenia Wacława Mejbauma zawartego w jego *Erotyku III* w książeczce *Świnia na sośnie*:

Mocny sznurek namydlić
Węzeł zgrabny uładzić
Hak stalowy umocnić
Sznur zawiesić
Łeb wsadzić.

Zamysł ten (może ku Waszemu żalowi) porzuciłem. Postanowiłem *zawierzyć*, że Wasze Pokolenie, zapewne nie bez ważnego powodu chrzczone Wielkim Imieniem, wykaże się ambicją intelektualną, godną Europejczyków od grubo ponad dwóch już tysiącleci rozmiłowanych w kulturze logicznej.

Uprzejmie zapraszam do Zakładu Logiki Stosowanej UAM jutro, w podanym wyżej czasie. Nie zaszkodzi, gdy porzucając młodzieńczą dezynwolturę intelektualną *ubogacicie* się przed tą wizytą odświeżonymi wiadomościami z: wykładu, przeczytanych lektur i rozwiązanych *samodzielnie* w ciągu ostatnich miesięcy wielu dziesiątków zadań.

jp

---

1. Sprawdź, czy jest kontrtautologią KRZ: $(p \wedge \neg(q \to p)) \leftrightarrow ((\neg r \to r) \to r)$.

Wystarczy zauważyć (i sprawdzić!), że lewy człon tej równoważności jest kontratautologią, a prawy tautologią:

- Człon lewy nie może być prawdziwy, ponieważ wtedy zarówno p jak i $\neg(q \to p)$ byłoby prawdą, a stąd $q \to p$ fałszem, czyli q byłoby prawdą, a p fałszem — sprzeczność. Zatem człon lewy jest fałszywy przy każdym wartościowaniu zmiennych.
- Człon prawy nie może być fałszywy, bo wtedy r byłoby fałszem, a $\neg r \to r$ byłoby prawdą, czyli mielibyśmy: $\neg 0 \to 0$ ma być prawdą, a przecie jest to (z tablic) $1 \to 0$, czyli fałsz — sprzeczność. Tak więc, człon prawy jest zawsze prawdziwy.

Zatem badana formuła, jako równoważność kontrtautologii oraz tautologii ***jest kontrtautologią.***

Można też oczywiście rachować: a) metodą tabelkową (wypełniając 80 miejsc w tabeli) lub b) użyć którejś z metod nie wprost. Gdy wybierzesz b), to przypuszczasz, że formuła jest prawdziwa i po stosownych rachunkach dochodzisz do sprzeczności; np. drzewo semantyczne tej formuły ma wszystkie gałęzie zamknięte.

Dla koneserek: lewy człon tej równoważności jest równoważny negacji *prawa poprzednika*, a prawy jest jedną z postaci *prawa Claviusa*.

---

2. Sprawdź, czy jest wnioskowaniem dedukcyjnym: *Nie dość, psiakość, że wśród Pierzastych nie ma Myszastych, to jeszcze wśród Ogoniastych są Pierzaste. Zatem nie wszystkie, na szczęście, Ogoniaste są Myszaste.*

Jest to poprawny sylogizm. Jest wiele metod rozstrzygania, czy sylogizmy są poprawne, np.: diagramy Venna lub Carrolla, reguły „filologiczne", metody z KRP (np. drzewa semantyczne), itd. Dla dowartościowania zajęć prowadzonych przez moich współpracowników, posłużmy się prawami *rachunku zbiorów*.

Oznaczmy: M — Myszaste, P — Pierzaste, O — Ogoniaste. Schemat przesłanki jest następujący: $P \cap M = \emptyset \wedge O \cap P \neq \emptyset$. Wniosek stwierdza, iż $O - M \neq \emptyset$. Pokażemy, że $O - M$ jest niepusty, bo ma niepusty podzbiór. Mamy: $P \cap M \cap O \subseteq P \cap M = \emptyset$, więc $P \cap M \cap O = \emptyset$ (podzbiór zbioru pustego jest pusty). Dalej, $O \cap P = (O \cap P \cap M) \cup (O \cap P \cap M') = \emptyset \cup (O \cap P \cap M')$. Stąd $O \cap P \cap M' = O \cap P \neq \emptyset$. Ponieważ $O \cap P \cap M' \subseteq O \cap M'$, więc $O \cap M' \neq \emptyset$, tj. $O - M \neq \emptyset$. Wnioskowanie ***jest dedukcyjne***, wniosek wynika logicznie z przesłanek. *Namaluj to*, jakby powiedział Joe Heller.

---

3. Sprawdź, czy jest semantycznie sprzecznym zbiorem formuł:
$\{\ q \to (p \to p),\ r \to (q \to (p \to p)),\ s \to (r \to (q \to (p \to p)))\ \}$.

Bardzo łatwe zadanie. Wystarczy zauważyć, że każda z tych formuł jest tautologią KRZ (bo jest implikacją, której następnikiem jest tautologia):

- $q \to (p \to p)$ nie może być fałszywa, bo $p \to p$ jest tautologią; zatem $q \to (p \to p)$ jest tautologią;
- $r \to (q \to (p \to p))$ nie może być fałszywa, bo (jak ustaliliśmy) $q \to (p \to p)$ jest tautologią; zatem $r \to (q \to (p \to p))$ jest tautologią;
- $s \to (r \to (q \to (p \to p)))$ nie może być fałszywa, bo (jak ustaliliśmy), $r \to (q \to (p \to p))$ jest tautologią; zatem $s \to (r \to (q \to (p \to p)))$ jest tautologią.

Stąd, rozważany zbiór formuł ***jest semantycznie niesprzeczny***. Nadto, każda z tych formuł jest prawdziwa przy każdym wartościowaniu zmiennych.[1]

Można też oczywiście rachować: a) metodą tabelkową (160 miejsc w tabeli) albo b) którąś z metod nie wprost. Gdy wybierzesz a), to w ostatniej kolumnie dostaniesz wyłącznie 1. Gdy wybierzesz b), to przypuszczasz, że wszystkie te formuły są prawdziwe przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych i po stosownych rachunkach przekonujesz się, że są one prawdziwe przy wszystkich wartościowaniach zmiennych.

---

[1] Można jeszcze prościej: dla $q = r = s = 0$ wszystkie te implikacje są prawdziwe (bo mają wtedy fałszywe poprzedniki).

4. Podaj przykład interpretacji, w której prawdziwa jest formuła: $\exists x \forall y\, R(y,x) \rightarrow \forall y \exists x\, R(y,x)$.

[*Nadobowiązkowe, dla ambitnych:* sprawdź, czy ta formuła jest tautologią KRP.]

Mam nadzieję, że nikt się nie obrazi: podana formuła, jako tautologia KRP, jest prawdziwa w ***każdej*** interpretacji. ***Cokolwiek*** wymyślisz, będzie dobre, o ile nie spaprzesz czegoś w sformułowaniach.

Aby pokazać, że ta formuła jest tautologią KRP, wystarczy wykluczyć, aby jej negacja była prawdziwa w jakiejkolwiek interpretacji, tj. wystarczy pokazać, że drzewo semantyczne negacji tej formuły ma wszystkie gałęzie zamknięte:

$$\begin{array}{c}
\neg(\exists x \forall y\, R(y,x) \rightarrow \forall y \exists x\, R(y,x)) \quad ^{1.\neg\rightarrow} \\
| \\
(1_g)\ \ \exists x \forall y\, R(y,x) \quad ^{2.\checkmark a} \\
| \\
(1_d)\ \ \neg\forall y \exists x\, R(y,x) \quad ^{3.\checkmark b} \\
| \\
(2)\ \ \forall y\, R(y,a) \quad ^{4.\star b} \\
| \\
(3)\ \ \neg\exists x\, R(b,x) \quad ^{5.\star a} \\
| \\
(4)\ \ R(b,a) \\
| \\
(5)\ \ \neg R(b,a) \\
| \\
\times_{4,5}
\end{array}$$

---

5. Uzupełnij:

Prawo *modus tollendo tollens* ma następującą postać:... $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$.

Spójnikiem głównym formuły języka KRZ nazywamy... ten jej spójnik, który nie występuje w zasięgu innego spójnika w tej formule. Na przykład, spójnikiem głównym formuły $p \rightarrow (\neg q \vee r)$ jest $\rightarrow$. Odnalezienie spójnika głównego dla formuł w notacji infiksowej umożliwiają nawiasy. W notacji polskiej spójnik główny jest pierwszym symbolem formuły: np. podana przed chwilą formuła w notacji polskiej wygląda tak: $CpANqr$.

Formuła α języka KRZ nie jest ani tautologią ani kontrtautologią KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy... przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych jest fałszywa (czyli nie jest tautologią) oraz przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych jest prawdziwa (czyli nie jest kontrtautologią).

Czy udało Ci się zapracować na Twój ulubiony Budyń z Kota? Smacznego!!!

Wspaniałych Wakacji!!!
Pogon

Językoznawstwo i Informacja Naukowa UAM — Egzamin 13 VI 2005
Koneserki Kisielu z Kota

---

1. Sprawdź, czy jest kontrtautologią KRZ: $((s \to \neg s) \to \neg s) \leftrightarrow (q \wedge \neg(p \to q))$.

Wystarczy zauważyć (i sprawdzić!), że prawy człon tej równoważności jest kontratautologią, a lewy tautologią:

- Człon prawy nie może być prawdziwy, ponieważ wtedy zarówno q jak i $\neg(p \to q)$ byłoby prawdą, a stąd $p \to q$ fałszem, czyli p byłoby prawdą, a q fałszem — sprzeczność. Zatem człon prawy jest fałszywy przy każdym wartościowaniu zmiennych.
- Człon lewy nie może być fałszywy, bo wtedy s byłoby fałszem, a $\neg s \to s$ byłoby prawdą, czyli mielibyśmy: $\neg 0 \to 0$ ma być prawdą, a przecie jest to (z tablic) $1 \to 0$, czyli fałsz — sprzeczność. Tak więc, człon lewy jest zawsze prawdziwy.

Zatem badana formuła, jako równoważność tautologii oraz kontrtautologii ***jest kontrtautologią.***
Można też oczywiście rachować: a) metodą tabelkową (wypełniając 80 miejsc w tabeli) lub b) użyć którejś z metod nie wprost. Gdy wybierzesz b), to przypuszczasz, że formuła jest prawdziwa i po stosownych rachunkach dochodzisz do sprzeczności; np. drzewo semantyczne tej formuły ma wszystkie gałęzie zamknięte.
Dla koneserek: prawy człon tej równoważności jest równoważny negacji *prawa poprzednika*, a lewy jest jedną z postaci *prawa Claviusa*.

---

2. Sprawdź, czy jest wnioskowaniem dedukcyjnym: *Chociaż pewne Myszaste są Pierzaste, to jednak, niestety, żaden Pierzasty nie jest Ogoniasty. Nie każdy Myszasty jest zatem Ogoniasty, oj nie każdy.*

Jest to poprawny sylogizm. Jest wiele metod rozstrzygania, czy sylogizmy są poprawne, np.: diagramy Venna lub Carrolla, reguły „filologiczne", metody z KRP (np. drzewa semantyczne), itd. Dla dowartościowania zajęć prowadzonych przez moich współpracowników, posłużmy się prawami *rachunku zbiorów*.
Oznaczmy: M — Myszaste, P — Pierzaste, O — Ogoniaste. Schemat przesłanki jest następujący: $M \cap P \neq \emptyset \wedge P \cap O = \emptyset$. Wniosek stwierdza, iż $M - O \neq \emptyset$. Pokażemy, że $M - O$ jest niepusty, bo ma niepusty podzbiór. Mamy: $M \cap P \cap O \subseteq P \cap O = \emptyset$, a więc $M \cap P \cap O = \emptyset$ (podzbiór zbioru pustego jest pusty). Dalej, $M \cap P = (M \cap P \cap O') \cup (M \cap P \cap O) = M \cap P \cap O' \cup \emptyset$. Stąd $M \cap P \cap O' = M \cap P \neq \emptyset$. Ponieważ $M \cap P \cap O' \subseteq M \cap O'$, więc $M \cap O' \neq \emptyset$, tj. $M - O \neq \emptyset$. Wnioskowanie ***jest dedukcyjne***, wniosek wynika logicznie z przesłanek. *Namaluj to*, jakby powiedział Joe Heller.

---

3. Sprawdź, czy jest semantycznie sprzecznym zbiorem formuł:
$\{\, p \to q,\ q \to r,\ \neg s \to \neg r,\ \neg s \vee p \,\}$.

Bardzo łatwe zadanie. Wystarczy zauważyć, że:

- $\neg s \to \neg r$ jest równoważne $r \to s$ (na mocy odwrotnego prawa transpozycji);
- $\neg s \vee p$ jest równoważne z $s \to p$ (też było na wykładzie!).

Wtedy rozwiązanie sprowadza się do znalezienia odpowiedzi na pytanie, czy zbiór:

$$\{\, p \to q,\ q \to r,\ r \to s,\ s \to p \,\}$$

jest semantycznie sprzeczny. Implikacje tworzące taki „zamknięty łańcuszek" będą wszystkie prawdziwe zarówno gdy $p = q = r = s = 1$, jak i gdy $p = q = r = s = 0$; aby to *zajarzyć* wystarczy pamiętać tabliczki i włączyć myślenie *szkolne* (nawet bez *turbo*).[2] A zatem badany zbiór ***jest semantycznie niesprzeczny.***
Można też oczywiście rachować: a) metodą tabelkową (208 miejsc w tabeli) lub b) którąś z metod nie wprost. Gdy wybierzesz a), to ustalisz, że zarówno dla $p = q = r = s = 1$, jak i dla $p = q = r = s = 0$ wszystkie badane formuły są prawdziwe. Gdy wybierzesz b), ustalisz to samo: np. jedynymi gałęziami otwartymi drzewa semantycznego dla koniunkcji wszystkich badanych formuł będą te, na których bądź $p = q = r = s = 1$, bądź $p = q = r = s = 0$.

---

[2] Natomiast pokazanie, że są to ***jedyne*** wartościowania, przy których wszystkie te implikacje są jednocześnie prawdziwe, wymaga (co prawda nietrudnego, ale jednak) uzasadnienia. Nie byłaś o to pytana, więc *spoko*.

4. Podaj przykład interpretacji, w której prawdziwa jest formuła: $\exists y \forall x\, Q(y,x) \to \forall x \exists y\, Q(y,x)$.

[*Nadobowiązkowe, dla ambitnych:* sprawdź, czy ta formuła jest tautologią KRP.]

Mam nadzieję, że nikt się nie obrazi: podana formuła, jako tautologia KRP, jest prawdziwa w ***każdej*** interpretacji. ***Cokolwiek*** wymyślisz, będzie dobre, o ile nie spaprzesz czegoś w sformułowaniach.

Aby pokazać, że ta formuła jest tautologią KRP, wystarczy wykluczyć, aby jej negacja była prawdziwa w jakiejkolwiek interpretacji, tj. wystarczy pokazać, że drzewo semantyczne negacji tej formuły ma wszystkie gałęzie zamknięte:

$$
\begin{array}{c}
\neg(\exists y \forall x\, Q(y,x) \to \forall x \exists y\, Q(y,x)) \;\; {}^{1.\neg\to} \\
| \\
(1_g)\;\; \exists y \forall x\, Q(y,x) \;\; {}^{2.\checkmark a} \\
| \\
(1_d)\;\; \neg\forall x \exists y\, Q(y,x) \;\; {}^{3.\checkmark b} \\
| \\
(2)\;\; \forall x\, Q(a,x) \;\; {}^{4.\star b} \\
| \\
(3)\;\; \neg\exists y\, Q(y,b) \;\; {}^{5.\star a} \\
| \\
(4)\;\; Q(a,b) \\
| \\
(5)\;\; \neg Q(a,b) \\
| \\
\times_{4,5}
\end{array}
$$

---

5. Uzupełnij:

Reguła *modus ponendo ponens* ma następującą postać:... $\frac{p \to q,\ p}{q}$.

Zmienna wolna danej formuły języka KRP to... zmienna, która ma co najmniej jedno wolne wystąpienie w tej formule. Wystąpienie wolne zmiennej w dormule to takie wystąpienie, które nie znajduje się w zasięgu żadnego kwantyfikatora, pod którym podpisana jest ta zmienna. Na przykład, w formule $\forall x\, (P(x,y) \to \exists z \exists y\, Q(z,y))$ zmienna y jest wolna, ponieważ jej pierwsze z lewej wystąpienie nie znajduje się w zasięgu kwantyfikatora z podpisaną pod nim zmienną y.

Formuła α języka KRZ nie wynika logicznie z formuły β wtedy i tylko wtedy, gdy... istnieje co najmniej jedno wartościowanie zmiennych zdaniowych, przy którym formuła β jest prawdziwa, a formuła α jest fałszywa.

Czy udało Ci się zapracować na Twój ulubiony Kisiel z Kota? Smacznego!!!

Wspaniałych Wakacji!!!

Pogon