Logika

Egzamin Poprawkowy — wiosna 2004

Filologia koreańska UAM

Imię i nazwisko: .... Grupa Ślepawy Piorun

---

Zadanie 1. Precyzyjnie napisz, co to znaczy, że formuła α rachunku zdań *wynika logicznie* ze zbioru formuł X. Podaj przykład takiego zbioru formuł X oraz formuły α, aby α nie wynikało logicznie z X.

Rozwiązanie.

Formuła α wynika logicznie ze zbioru formuł X dokładnie wtedy, gdy przy każdym wartościowaniu zmiennych zdaniowych przy którym wszystkie formuły ze zbioru X są prawdziwe również formuła α jest prawdziwa.

Dla przykładu, formuła p ***nie*** wynika logicznie z jednoelementowego zbioru formuł $\{p \rightarrow p\}$. Tak więc, np. wnioskowanie: *Mówię rozsądnie, o ile mówię rozsądnie. A zatem mówię rozsądnie.* ***nie*** jest dedukcyjne. Natomiast formuła p wynika logicznie z jednoelementowego zbioru formuł $\{p\}$. Stąd, np. wnioskowanie *Mówię rozsądnie. A zatem mówię rozsądnie.* jest dedukcyjne. Przemyśl to. I niech słowo nie wyprzedza myśli.

Zadanie 2. Zbadaj, czy jest wnioskowaniem dedukcyjnym:

Premiera wskazuje Prezydent lub Prezes. Jeśli Premiera wskazuje Prezydent, to nie robi tego Prezes. Stąd wniosek, że Prezes nie ma nic wspólnego z Prezydentem.

Rozwiązanie.

Znajdujemy zdania proste i budujemy schemat tego wnioskowania:

p — Premiera wskazuje Prezydent.

q — Premiera wskazuje Prezes.

r — Prezes nie ma nic wspólnego z Prezydentem.

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ p \rightarrow \neg q \\ \hline r \end{array}$$

Czy istnieje co najmniej jedno wartościowanie zmiennych zdaniowych przy którym obie przesłanki tej reguły są prawdziwe, a wniosek fałszywy? Wystarczy sprawdzić, czy formuły $p \vee q$ oraz $p \rightarrow \neg q$ mogą być prawdziwe przy jakimkolwiek wartościowaniu, przy którym r jest fałszywa:

p	q	$\neg q$	$p \vee q$	$p \rightarrow \neg q$
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

Widać więc, że przy wartościowaniach:

$p = 0$, $q = 1$, $r = 0$

$p = 1$, $q = 0$, $r = 0$

przesłanki reguły są obie prawdziwe, a jej wniosek fałszywy. Reguła jest zawodna, jej wniosek ***nie*** wynika logicznie z przesłanek. Rozważane wnioskowanie ***nie*** jest dedukcyjne.

Uwaga. Kilka naszych uroczych koreanistek popełniło ciekawe błędy w analizie tego wnioskowania, usiłując reprezentować strukturę składniową wniosku z użyciem zmiennych p oraz q i pisząc że wniosek ma postać np.:

$\neg(p \equiv q)$ lub $p \equiv \neg q$. Pozwolę sobie — całkiem od rzeczy, ale chyba śmiesznie — dodać, że to kto będzie kolejnym Premierem Rzeczpospolitej Polskiej zależy od demokratycznej decyzji suwerennego Parlamentu. Nie ustala się tego w Moskwie, Watykanie, Brukseli, Waszyngtonie ani w Poznaniu. Oczywiście ta ostatnia uwaga nie ma nic wspólnego z logiką.

Zadanie 3. Przypuśćmy, że każdy z obywateli z niepustego zbioru X ma co najmniej jednego dłużnika w tymże zbiorze. Niech relacja $R \subseteq X \times X$ będzie określona następująco:

xRy wtedy i tylko wtedy, gdy x jest wierzycielem y.

Przyjmijmy, że R jest asymetryczna w X. Czy ktoś w X jest wtedy swoim własnym dłużnikiem? Uzasadnij odpowiedź.

Co najmniej ile elementów musi mieć X? Uzasadnij odpowiedź.

Schnę z ciekawości, jak wyrazisz polszczyzną subtelną ale i dobitną to, że R jest w X przechodnia, a nie jest w X spójna.

Rozwiązanie.

Zgodzimy się, że relacje: *być dłużnikiem* oraz *być wierzycielem* są swoimi wzajemnymi konwersami, tzn.:

$$\begin{aligned} xRy \quad &\equiv \quad x \text{ jest wierzycielem } y \\ &\equiv \quad y \text{ jest dłużnikiem } x \\ &\equiv \quad yR^{-1}x. \end{aligned}$$

Możemy więc czytać wyrażenie $xR^{-1}y$ tak: x jest dłużnikiem y. Proszę zauważyć, że być ***swoim własnym*** dłużnikiem to to samo, co być ***swoim własnym*** wierzycielem, tj. dla dowolnego $x \in X$ zachodzi: $xRx \equiv xR^{-1}x$.

Nietrudno zauważyć, że jeśli R jest asymetryczna, to również R^{-1} jest asymetryczna.

Jeśli R jest asymetryczna w X (a co za tym idzie, również R^{-1} asymetryczna w X), to nikt w X nie może być swoim własnym dłużnikiem. Przypuśćmy bowiem, że obywatel x_0 jest swoim własnym dłużnikiem, tj. iż zachodzi $x_0R^{-1}x_0$. Z asymetryczności R^{-1} mamy: $x_0R^{-1}x_0 \rightarrow \neg x_0R^{-1}x_0$. Na mocy reguły *modus ponens* mamy: $\neg x_0R^{-1}x_0$. Sprzeczność.

Pokazaliśmy więc, że R^{-1} jest przeciwzwrotna. Jest oczywiste, że jeżeli R^{-1} jest przeciwzwrotna, to również R jest przeciwzwrotna.

Jeśli każdy obywatel w X ma co najmniej jednego dłużnika w X, to zbiór X musi mieć co najmniej trzy elementy. X z założenia jest niepusty. Przed chwilą pokazaliśmy, że relacja R jest przeciwzwrotna, więc X nie może być jednoelementowy. R jest asymetryczna, więc X nie może mieć tylko dwóch elementów. Trójelementowe zbiory obywateli, w którym R jest asymetryczna oraz spełnia warunek $\forall y \exists x\, xR^{-1}y$ mogą istnieć. Przypuśćmy np. (fikcyjnie!), że Pan Prezydent jest wierzycielem Pana Premiera, Pan Premier wierzycielem Pana Prezesa, a Pan Prezes wierzycielem Pana Prezydenta. Nie ma sprzeczności logicznej, choć sytuacja finansowa wymienionych panów jest nieco skomplikowana. Biedna taka Rzeczpospolita.

To, że R jest w X przechodnia wypowiedzieć można np. tak: *Dłużnicy moich dłużników są moimi dłużnikami.* To, że R nie jest w X spójna da się wyrazić np. tak: *Pewni obywatele nie mają wzajemnych długów.* To oczywiście sformułowania uproszczone. Warunek przechodniości oraz negacja warunku spójności formalnie wyglądają tak oto:

$$\forall x \in X\ \forall y \in X\ \forall z \in X\ (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

$$\neg \forall x \in X\ \forall y \in X\ (x \neq y \rightarrow xRy \vee yRx).$$

Proszę pamiętać, że mówiąc o formalnych własnościach relacji trzeba brać pod uwagę zbiory, na których owe relacje są określone. Gdy do wspomnianego wyżej zbioru {Prezydent, Premier, Prezes} (na którym R jest spójna) dodamy np. piszącego te słowa, który nie pozostaje w żadnych zależnościach finansowych z wymienionymi panami, to w tym czteroelementowym zbiorze R spójna już nie jest.

Na zakończenie, życzliwa rada dla naszych koreanistek: pamiętaj, że *przyjaciółki twoich przyjaciół niekoniecznie są twoimi przyjaciółkami.* Wesołych wakacji!

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl

Logika

Egzamin Poprawkowy — wiosna 2004

Filologia koreańska UAM

Imię i nazwisko: .... Grupa Dychawiczny Grom

---

Zadanie 1. Precyzyjnie napisz, co to znaczy, że formuła α rachunku zdań *nie wynika logicznie* ze zbioru formuł X. Podaj przykład takiego zbioru formuł X oraz formuły α, aby α wynikało logicznie z X.

Rozwiązanie.

Formuła α nie wynika logicznie ze zbioru formuł X jeśli przy co najmniej jednym wartościowaniu zmiennych zdaniowych przy którym wszystkie formuły ze zbioru X są prawdziwe formuła α jest fałszywa.

Dla przykładu, formuła q wynika logicznie ze zbioru formuł $\{p, p \rightarrow q\}$. Zatem np. wnioskowanie *Jestem, o ile myślę. No i myślę. Zatem jestem.* jest dedukcyjne. Natomiast wnioskowanie *Myślę. Zatem jestem.* dedukcyjne nie jest. Przemyśl to. Przedyskutuj z kolegą z filozofii. To wolny kraj, można się spierać.

Zadanie 2. Zbadaj, czy jest wnioskowaniem dedukcyjnym:

Premiera wskazuje Prezydent lub Prezes. Jeśli Premiera nie wskazuje Prezydent, to robi to Prezes. Stąd wniosek, że Prezes nie ma nic wspólnego z Prezydentem.

Rozwiązanie.

Znajdujemy zdania proste i budujemy schemat tego wnioskowania:

p — Premiera wskazuje Prezydent.

q — Premiera wskazuje Prezes.

r — Prezes nie ma nic wspólnego z Prezydentem.

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \rightarrow q \\ \hline r \end{array}$$

Czy istnieje co najmniej jedno wartościowanie zmiennych zdaniowych przy którym obie przesłanki tej reguły są prawdziwe, a wniosek fałszywy? Wystarczy sprawdzić, czy formuły $p \vee q$ oraz $\neg p \rightarrow q$ mogą być prawdziwe przy jakimkolwiek wartościowaniu, przy którym r jest fałszywa:

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \rightarrow q$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

Widać więc, że przy wartościowaniach:

$p = 0$, $q = 1$, $r = 0$

$p = 1$, $q = 0$, $r = 0$

$p = 1$, $q = 1$, $r = 0$

przesłanki reguły są obie prawdziwe, a jej wniosek fałszywy. Reguła jest zawodna, jej wniosek ***nie*** wynika logicznie z przesłanek. Rozważane wnioskowanie ***nie*** jest dedukcyjne.

Uwaga. Kilka naszych uroczych koreanistek popełniło ciekawe błędy w analizie tego wnioskowania, usiłując reprezentować strukturę składniową wniosku z użyciem zmiennych p oraz q i pisząc że wniosek ma postać np.: $\neg(p \equiv q)$ lub $p \equiv \neg q$. Pozwolę sobie — całkiem od rzeczy, ale chyba śmiesznie — dodać, że to kto będzie kolejnym Premierem Rzeczpospolitej Polskiej zależy od demokratycznej decyzji suwerennego Parlamentu. Nie ustala się tego w Moskwie, Watykanie, Brukseli, Waszyngtonie ani w Poznaniu. Oczywiście ta ostatnia uwaga nie ma nic wspólnego z logiką.

Zadanie 3. Przypuśćmy, że każdy z obywateli z niepustego zbioru X ma co najmniej jednego wierzyciela w tymże zbiorze. Niech relacja $R \subseteq X \times X$ będzie określona następująco:

xRy wtedy i tylko wtedy, gdy x jest dłużnikiem y.

Przyjmijmy, że R jest asymetryczna w X. Czy ktoś w X jest wtedy swoim własnym wierzycielem? Uzasadnij odpowiedź.

Co najmniej ile elementów musi mieć X? Uzasadnij odpowiedź.

Schnę z ciekawości, jak wyrazisz polszczyzną subtelną ale i dobitną to, że R jest w X spójna, a nie jest w X przechodnia.

Rozwiązanie.

Zgodzimy się, że relacje: *być wierzycielem* oraz *być dłużnikiem* są swoimi wzajemnymi konwersami, tzn.:

$$\begin{aligned} xRy &\equiv x \text{ jest dłużnikiem } y \\ &\equiv y \text{ jest wierzycielem } x \\ &\equiv yR^{-1}x. \end{aligned}$$

Możemy więc czytać wyrażenie $xR^{-1}y$ tak: x jest wierzycielem y. Proszę zauważyć, że być ***swoim własnym*** wierzycielem to to samo, co być ***swoim własnym*** dłużnikiem, tj. dla dowolnego $x \in X$ zachodzi: $xRx \equiv xR^{-1}x$.

Nietrudno zauważyć, że jeśli R jest asymetryczna, to również R^{-1} jest asymetryczna.

Jeśli R jest asymetryczna w X (a co za tym idzie, również R^{-1} asymetryczna w X), to nikt w X nie może być swoim własnym wierzycielem. Przypuśćmy bowiem, że obywatel x_0 jest swoim własnym wierzycielem, tj. iż zachodzi $x_0R^{-1}x_0$. Z asymetryczności R^{-1} mamy: $x_0R^{-1}x_0 \rightarrow \neg x_0R^{-1}x_0$. Na mocy reguły *modus ponens* mamy: $\neg x_0R^{-1}x_0$. Sprzeczność.

Pokazaliśmy więc, że R^{-1} jest przeciwzwrotna. Jest oczywiste, że jeżeli R^{-1} jest przeciwzwrotna, to również R jest przeciwzwrotna.

Jeśli każdy obywatel w X ma co najmniej jednego wierzyciela w X, to zbiór X musi mieć co najmniej trzy elementy. X z założenia jest niepusty. Przed chwilą pokazaliśmy, że relacja R jest przeciwzwrotna, więc X nie może być jednoelementowy. R jest asymetryczna, więc X nie może mieć tylko dwóch elementów. Trójelementowe zbiory obywateli, w którym R jest asymetryczna oraz spełnia warunek $\forall y \exists x\, xR^{-1}y$ mogą istnieć. Przypuśćmy np. (fikcyjnie!), że Pan Prezydent jest dłużnikiem Pana Premiera, Pan Premier dłużnikiem Pana Prezesa, a Pan Prezes dłużnikiem Pana Prezydenta. Nie ma sprzeczności logicznej, choć sytuacja finansowa wymienionych panów jest nieco skomplikowana. Biedna taka Rzeczpospolita.

To, że R nie jest w X przechodnia wypowiedzieć można np. tak: *Wierzyciele moich wierzycieli niekoniecznie są moimi wierzycielami.* To, że R jest w X spójna da się wyrazić np. tak: *Każdy jest czyimś dłużnikiem lub wierzycielem.* To oczywiście sformułowania uproszczone. Negacja warunku przechodniości oraz warunek spójności formalnie wyglądają tak oto:

$$\neg \forall x \in X\ \forall y \in X\ \forall z \in X\ (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

$$\forall x \in X\ \forall y \in X\ (x \neq y \rightarrow xRy \vee yRx).$$

Proszę pamiętać, że mówiąc o formalnych własnościach relacji trzeba brać pod uwagę zbiory, na których owe relacje są określone. Gdy do wspomnianego wyżej zbioru {Prezydent, Premier, Prezes} (na którym R jest spójna) dodamy np. piszącego te słowa, który nie pozostaje w żadnych zależnościach finansowych z wymienionymi panami, to w tym czteroelementowym zbiorze R spójna już nie jest.

Na zakończenie, życzliwa rada dla naszych koreanistów: pamiętaj, że *przyjaciele twoich przyjaciółek niekoniecznie są twoimi przyjaciółmi.* Wesołych wakacji!

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki Stosowanej UAM
www.logic.amu.edu.pl