Metalogika

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Funkcje rekurencyjne

Plan wykładu

Uwaga. Niniejsza prezentacja w żadnej mierze nie jest przybliżonym choćby wykładem teorii funkcji rekurencyjnych. Ograniczamy się do definicji wybranych pojęć, podajemy nieco przykładów i formułujemy kilka twierdzeń.

Cele tej prezentacji są zasadniczo dwa:

- pokazanie, że intuicyjne pojęcie obliczalności można reprezentować matematycznie;
- oswojenie słuchaczy z operacjami kodowania, które będą wykorzystywane w arytmetyzacji składni.

Słuchacze zainteresowani teorią funkcji rekurencyjnych zechcą skorzystać z literatury przedmiotu podanej na końcu prezentacji.

Pojęcie algorytmu

Metoda obliczalna (efektywna): w skończonej liczbie prostych, mechanicznych kroków daje odpowiedź dla dowolnych danych ustalonej postaci. Dane mogą mieć strukturę złożoną. Obliczenie za pomocą metody efektywnej nazywa się ***algorytmem***.
Podane wyżej pojęcie obliczalności ma charakter **intuicyjny**. Możliwe są jego różne matematyczne precyzacje.

- Przykład metody efektywnej: algorytm ustalania, czy dana formuła języka Klasycznego Rachunku Zdań jest prawem (tautologią) tego rachunku.
- Przykład problemu, dla którego ***nie istnieje*** metoda obliczalna: ustalanie, czy dowolna formuła języka Klasycznego Rachunku Predykatów jest prawem (tautologią) tego rachunku.

Nieśmiertelne monogamiczne kazirodcze króliki

- Mamy Pierwszą Parę królików (samca i samicę). Chcemy obliczyć, ile par królików otrzymamy po n miesiącach przy założeniu, że każda para królików rodzi co miesiąc nową parę (samca i samicę), która staje się reproduktywna po miesiącu (i natychmiast z tego korzysta).
- Nadto, króliki żyją wiecznie, są monogamiczne i kazirodcze (począwszy od drugiej pary tylko brat z siostrą dają potomstwo; Pierwsza Para też kontynuuje prokreację), oraz nie ustają w rozmnażaniu. [Jest również wersja ze śmiertelnymi królikami.]

Ciąg Fibonacciego:

- $F(0) = 0$
- $F(1) = 1$
- $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ dla $n \geqslant 2$

Ciąg Mosera-Steinhausa

Wprowadźmy oznaczenia (oryginalna symbolika Steinhausa była inna):

1. $\triangle(n)$ oznacza n^n
2. $\square(n)$ oznacza iterowanie n razy operacji $\triangle$ dla argumentu n
3. $\bigstar(n)$ oznacza iterowanie n razy operacji $\square$ dla argumentu n.

Czy potrafisz obliczyć $\bigstar(2)$?

1. $\bigstar(2) = \square(\square(2)) = \square(\triangle(\triangle(2)))$
2. $\triangle(\triangle(2)) = \triangle(2^2) = \triangle(4) = 4^4 = 256$
3. $\bigstar(2) = \square(256) = \triangle(\triangle \ldots (\triangle(256) \ldots))$, gdzie operacja $\triangle$ wykonywana jest 256 razy.

Masz: $\triangle(\triangle(256)) = (256^{256})^{(256^{256})}$ a dalej licz samodzielnie:)

Ciąg Mosera-Steinhausa

W notacji Steinhausa argumenty były umieszczane wewnątrz wielokątów. Konstrukcję: n w m p-kątach ($p \geqslant 3$) opisuje funkcja $M(n, m, p)$:

1. $M(n, 1, 3) = n^n$
2. $M(n, 1, p + 1) = M(n, n, p)$
3. $M(n, m + 1, p) = M(M(n, 1, p), m, p)$.

Liczba ★2 (czyli 2 w pięciokącie) nazywana jest czasem *mega*, zaś 2 w mega-kącie (czyli wielokącie o mega bokach) nosi nazwę *moser*. Liczbę ★10 (czyli 10 w pięciokącie) nazywa się *megiston*:

1. mega$=M(2, 1, 5)$
2. megiston$=M(10, 1, 5)$
3. moser$=M(2, 1, M(2, 1, 5))$.

Obliczenia a dowody

- Obliczenia traktujemy jako operacje na danych.
- Argumenty obliczeń (dane) mogą mieć różne struktury (liczby, ciągi symboli, drzewa, itd.).
- Każde obliczenie może być reprezentowane przez drzewo:
  - w korzeniu znajduje się wynik obliczenia
  - w liściach znajdują się dane (argumenty)
  - pozostałe wierzchołki odpowiadają częściowym obliczeniom, prowadzącym do wyniku.
- W ramach tych wykładów interesuje nas możliwość wykorzystania matematycznych modeli obliczalności w dowodach twierdzeń metalogicznych.

Rekursja = ?

- Łacińskie *recurrere* znaczy m.in.: przybiec na powrót, wrócić do czegoś, pospieszyć na powrót, a *recursare* znaczy: wracać, często powracać.
- Obliczanie wartości pewnych funkcji dla argumentu $n+1$ wymaga znajomości wartości tych funkcji dla argumentów $0, 1, 2, \ldots, n$.

Rozważamy przy tym nie całkiem dowolne funkcje, ale jedynie takie, których wartości otrzymujemy w sposób ***efektywny*** (***obliczalny***). Za funkcje obliczalne uznamy np. funkcje stałe (nic nie trzeba liczyć), funkcję następnika (dodanie jedynki do liczby), funkcje rzutu (wybranie liczby ze skończonej listy). Uznamy, że składając funkcje obliczalne otrzymamy funkcję obliczalną. Uznamy też, że pewne inne operacje (rekursja prosta, minimum efektywne) stosowane do funkcji obliczalnych dają funkcje obliczalne.

Funkcje proste

Częściowe funkcje liczbowe $f(x_1, \ldots, x_n)$ (dla $n = 1, 2, \ldots$), to funkcje określone na pewnym podzbiorze zbioru ω^n o wartościach będących liczbami naturalnymi. W tym wykładzie ω to zbiór wszystkich liczb naturalnych. n-argumentowa funkcja $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest ***całkowita***, jeśli jej dziedziną jest cały zbiór ω^n, czyli gdy $dom(f) = \omega^n$.

Następujące funkcje całkowite nazywamy ***prostymi***:

- $s(x) =$ następnik x (czyli *dodanie jedynki do* x),
- $o(x) = 0$ (funkcja stała równa 0),
- $I^n_m(x_1, \ldots, x_n) = x_m$ (dla $1 \leqslant m \leqslant n$) (rzut na m-tą współrzędną).

Funkcja $h(x_1, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ otrzymywana jest z funkcji $g, f_1, \ldots, f_m$ przez operację ***złożenia***.

Schemat rekursji prostej

Funkcję $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ otrzymujemy z funkcji $g(x_1, \ldots, x_n)$ oraz $h(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ za pomocą ***schematu rekursji prostej***, jeżeli:

- $f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$,
- $f(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))$.

Dla $n = 0$ schemat rekursji prostej przyjmuje następującą postać:

- $f(0) = a$,
- $f(y + 1) = g(y, f(y))$,

gdzie a jest jednoargumentową funkcją stałą o wartości a.

Minimum efektywne

Jeżeli funkcja $g(x_1, \ldots, x_n)$ spełnia warunek:

- (∗) dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n$ istnieje y taka, że $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$,

to mówimy, że funkcja $f(x_1, \ldots, x_n)$ określona warunkiem:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y\ [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$$

(czytamy: $f(x_1, \ldots, x_n) =$ najmniejsza y taka, że $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$) jest zdefiniowana przez ***minimum efektywne***. Warunek (∗) nazywamy ***warunkiem efektywności***.

Funkcje określone za pomocą minimum efektywnego stosowanego do funkcji całkowitych są całkowite.

Minimum efektywne

Jeżeli relacja R spełnia warunek:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \; R(x_1, \ldots, x_n, y),$$

to mówimy, że funkcja $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest zdefiniowana z relacji R przez ***minimum efektywne***, gdy:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y \; R(x_1, \ldots, x_n, y),$$

gdzie $\mu y \; R(x_1, \ldots, x_n, y)$ jest najmniejszą liczbą y, dla której zachodzi $R(x_1, \ldots, x_n, y)$.

Dla przykładu, funkcję $f(x) = \lfloor \log_2 x \rfloor$ można zdefiniować przez minimum efektywne: $f(x) = \mu y \; (2^{y+1} > x)$. Tutaj $\lfloor \; \rfloor$ jest funkcją *podłogi* i przyjmujemy $\log_2 0 = 0$.

Operacja minimum

Funkcję $f(x_1, \ldots, x_n)$ otrzymujemy z funkcji $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ za pomocą operacji ***minimum*** (za pomocą μ-***operatora***), co zaznaczamy następująco:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu y \, [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0],$$

gdy spełniony jest warunek:

$f(x_1, \ldots, x_n)$ jest określona i równa y wtedy i tylko wtedy, gdy $g(x_1, \ldots, x_n, 0), \ldots, g(x_1, \ldots, x_n, y-1)$ są wszystkie określone i różne od 0, zaś $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.

Funkcje otrzymane przez operację minimum (bez warunku efektywności) mogą nie być całkowite.

Funkcje: pierwotnie, częściowo i ogólnie rekurencyjne

- Funkcja $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest ***pierwotnie rekurencyjna***, jeśli może być otrzymana z funkcji prostych za pomocą skończonej liczby zastosowań operacji złożenia oraz rekursji prostej.
- Funkcja $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest ***częściowo rekurencyjna***, jeśli może być otrzymana z funkcji prostych za pomocą skończonej liczby zastosowań operacji złożenia, rekursji prostej oraz operacji minimum.
- Funkcja $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest ***ogólnie rekurencyjna*** (krótko: ***rekurencyjna***), gdy jest ona całkowitą funkcją częściowo rekurencyjną.

Każda funkcja pierwotnie rekurencyjna jest też ogólnie rekurencyjna (lecz nie na odwrót).

Ograniczony μ-operator

Funkcję $f(x_1, \ldots, x_n)$ otrzymujemy z funkcji

$$g(x_1, \ldots, x_n, y) \text{ oraz } h(x_1, \ldots, x_n)$$

za pomocą ***ograniczonego μ-operatora***, jeśli dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n$:

$$\mu y[g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$$

jest określona i nie większa od $h(x_1, \ldots, x_n)$ oraz

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y\ [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0].$$

W szczególności, jeśli $h(x_1, \ldots, x_n) = a$ jest funkcją stałą, to piszemy: $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y \leqslant a\ [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$.

Zbiory i relacje rekurencyjne

Niech P będzie dowolną n-argumentową relacją na zbiorze ω. Funkcję $\chi_P(x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy ***funkcją charakterystyczną relacji*** P, jeśli funkcja ta spełnia warunek

$$\chi_P(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad P(x_1, \ldots, x_n) \text{ zachodzi,} \\ 1, & \text{gdy} \quad P(x_1, \ldots, x_n) \text{ nie zachodzi.} \end{cases}$$

Relacja $P \subseteq \omega^n$ jest ***rekurencyjna*** (***pierwotnie rekurencyjna***), jeśli jej funkcja charakterystyczna jest ogólnie rekurencyjna (pierwotnie rekurencyjna). W szczególności, funkcje charakterystyczne zbiorów to funkcje charakterystyczne relacji jednoargumentowych.

Uwaga. W niektórych podręcznikach przez funkcję charakterystyczną relacji P rozumie się funkcję $1 - \chi_P(x_1, \ldots, x_n)$. To kwestia umowy, przyjmowanej dla wygody obliczeń.

Funkcje rekurencyjne: inna definicja

W myśl innej definicji ***zbiór funkcji rekurencyjnych*** to najmniejszy zbiór funkcji:

- zawierający funkcje rzutu I_m^n, dodawania $+$, mnożenia $\cdot$ i funkcję charakterystyczną $\chi_<$ relacji mniejszości $<$,
- domknięty na operacje złożenia funkcji oraz definiowanie przez minimum efektywne.

Obie te definicji określają tę samą klasę funkcji:

- można pokazać, że $+$, $\cdot$ i $\chi_<$ są pierwotnie rekurencyjne (zobacz niżej);
- można pokazać, że schemat rekursji prostej daje się wyrazić za pomocą minimum efektywnego.

Rozważa się wiele typów rekursji: zwrotna, jednoczesna, ograniczona, itd.

Oznaczenia

Stosujemy oznaczenie:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[g(x_1, \ldots, x_n, y) = h(x_1, \ldots, x_n, y)],$$

gdy spełniony jest warunek: $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest określone i równe y wtedy i tylko wtedy, gdy $g(x_1, \ldots, x_n, i)$ oraz $h(x_1, \ldots, x_n, i)$ są określone dla $i = 0, 1, \ldots, y$, $g(x_1, \ldots, x_n, i) \neq h(x_1, \ldots, x_n, i)$ dla $i < y$ oraz $g(x_1, \ldots, x_n, y) = h(x_1, \ldots, x_n, y)$.

W podobny sposób rozumiemy oznaczenia:

- $\mu y[g(x_1, \ldots, x_n, y) \neq h(x_1, \ldots, x_n, y)]$,
- $\mu y[g(x_1, \ldots, x_n, y) \leqslant h(x_1, \ldots, x_n, y)]$,
- $\mu y[g(x_1, \ldots, x_n, y) < h(x_1, \ldots, x_n, y)]$, itd.

Iteracja, odwrócenie, funkcja uniwersalna

Będziemy mówić, że funkcję $f(x)$ otrzymujemy z funkcji $g(x)$ przez ***iterację*** i oznaczać ten fakt przez $f(x) = \mathrm{i}g(x)$, gdy

- $f(0) = 0$,
- $f(x+1) = g(f(x))$.

Będziemy mówić, że funkcję $f(x)$ otrzymujemy z funkcji $g(x)$ przez ***odwrócenie*** i zaznaczać ten fakt przez $f(x) = g^{-1}(x)$, gdy

$$f(x) = \mu y[g(y) = x].$$

Niech $\boldsymbol{G}$ będzie pewną rodziną n-argumentowych funkcji częściowych. Funkcję $n+1$-argumentową F nazwiemy ***funkcją uniwersalną*** dla $\boldsymbol{G}$, jeśli

$$\boldsymbol{G} = \{F(0, x_1, \ldots, x_n), F(1, x_1, \ldots, x_n), F(2, x_1, \ldots, x_n), \ldots\}.$$

Przykłady funkcji pierwotnie rekurencyjnych

Następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

- (1) $f(x) = x + n$;
- (2) $f(x) = n$;
- (3) $f_1(x, y) = x + y$;
- (4) $f_2(x, y) = x \cdot y$;
- (5) $f_3(x, y) = x^y$ (przyjmujemy $0^0 = 1$);
- (6) $f(x) = x!$ (przyjmujemy $0! = 1$).

Przykłady funkcji pierwotnie rekurencyjnych

Dowód (pierwotnej rekurencyjności tych funkcji).

- (1) $f(x) = \underbrace{s(s(\ldots s}_{n\ razy}(x)\ldots))$.
- (2) $f(x) = \underbrace{s(s(\ldots s}_{n\ razy}(o(x))\ldots))$.
- (3) $f_1(x, y) = x + y$ otrzymujemy przez rekursję prostą: $f_1(0, y) = y = I_1^1(y)$, $f_1(x + 1, y) = (x + y) + 1 = s(f_1(x, y))$.
- (4) $f_2(x, y) = x \cdot y$ otrzymujemy przez rekursję prostą: $f_2(0, y) = 0 = o(y)$, $f_2(x + 1, y) = (x \cdot y) + y = f_1(f_2(x, y), y)$
- (5) $f_3(x, y) = x^y$ otrzymujemy przez rekursję prostą: $f_3(x, 0) = 1 = s(o(x))$, $f_3(x, y + 1) = x^y \cdot x = f_2(f_3(x, y), x)$.
- (6) $f(0) = 1$, $f(x + 1) = s(x) \cdot f(x)$.

Przykłady funkcji pierwotnie rekurencyjnych

Następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

- (7) $sg(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x = 0 \\ 1, & \text{gdy} \quad x > 0; \end{cases}$
- (8) $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x > 0 \\ 1, & \text{gdy} \quad x = 0; \end{cases}$
- (9) $x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x = 0 \\ x - 1, & \text{gdy} \quad x > 0; \end{cases}$
- (10) $x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x \leqslant y \\ x - y, & \text{gdy} \quad x > y; \end{cases}$
- (11) $|x - y|$;
- (12) $\max(x, y)$;
- (13) $\min(x, y)$.

Przykłady funkcji pierwotnie rekurencyjnych

Dowód.

- (7) $\mathrm{sg}(0) = 0$; $\mathrm{sg}(x+1) = s(o(x))$.
- (8) $\overline{\mathrm{sg}}(0) = 1$, $\overline{\mathrm{sg}}(x+1) = o(x)$.
- (9) $0 \dot{-} 1 = 0$, $(x+1) \dot{-} 1 = x$.
- (10) $x \dot{-} 0 = x$, $x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1$.
- (11) $|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$.
- (12) $\max(x, y) = x \cdot \mathrm{sg}(x \dot{-} y) + y \cdot \overline{\mathrm{sg}}(x \dot{-} y)$.
- (13) $\min(x, y) = x \cdot \mathrm{sg}(y \dot{-} x) + y \cdot \overline{\mathrm{sg}}(y \dot{-} x)$.

Przykłady funkcji pierwotnie rekurencyjnych

Niech funkcje $f_0, f_1, \ldots, f_s$ mają następującą własność: dla dowolnych argumentów $x_1, \ldots, x_n$ jedna i tylko jedna z tych funkcji równa jest 0. Powiemy, że funkcja g jest ***określona warunkowo***, gdy

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} h_0(x_1, \ldots, x_n), & \text{gdy} \quad f_0(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ h_s(x_1, \ldots, x_n), & \text{gdy} \quad f_s(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Jeśli funkcje $h_0, \ldots, h_s, f_0, \ldots, f_s$ są pierwotnie rekurencyjne, to g jest pierwotnie rekurencyjna.

Dowód. $g(x_1, \ldots, x_n) = h_0(x_1, \ldots, x_n) \cdot \overline{\mathrm{sg}}(f_0(x_1, \ldots, x_n)) + \ldots$
$\ldots + h_s(x_1, \ldots, x_n) \cdot \overline{\mathrm{sg}}(f_s(x_1, \ldots, x_n))$.

Przykłady funkcji pierwotnie rekurencyjnych

Niech g, α, β będą funkcjami pierwotnie rekurencyjnymi. Wtedy następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

(14) $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \sum\limits_{i=0}^{x_{n+1}} g(x_1, \ldots, x_n, i);$

(15) $f(x_1, \ldots, x_n, y, z) = \begin{cases} \sum\limits_{i=y}^{z} g(x_1, \ldots, x_n, i), & \text{gdy} \quad y \leqslant z, \\ 0, & \text{gdy} \quad y > z; \end{cases}$

(16) $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) =$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{i=\alpha(y_1,\ldots,y_m)}^{\beta(y_1,\ldots,y_m)} g(x_1, \ldots, x_n, i), & \text{gdy } \alpha(y_1, \ldots, y_m) \leqslant \beta(y_1, \ldots, y_m), \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach}; \end{cases}$$

Przykłady funkcji pierwotnie rekurencyjnych

(17) $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \prod_{i=0}^{x_{n+1}} g(x_1, \ldots, x_n, i)$;

(18) $f(x_1, \ldots, x_n, y, z) = \begin{cases} \prod_{i=y}^{z} g(x_1, \ldots, x_n, i), & \text{gdy} \quad y \leqslant z \\ 0, & \text{gdy} \quad y > z; \end{cases}$

(19) $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) =$

$$= \begin{cases} \prod_{i=\alpha(y_1,\ldots,y_m)}^{\beta(y_1,\ldots,y_m)} g(x_1, \ldots, x_n, i), & \text{gdy } \alpha(y_1, \ldots, y_m) \leqslant \beta(y_1, \ldots, y_m), \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Jeśli funkcję f otrzymujemy z funkcji pierwotnie rekurencyjnych g i h za pomocą ograniczonego μ-operatora, to f jest pierwotnie rekurencyjna.

Dowód. $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{h(x_1,\ldots,x_n)} \mathrm{sg}(\prod_{j=0}^{i} g(x_1, \ldots, x_n, j))$.

Przykłady funkcji pierwotnie rekurencyjnych

Następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

- (20) $[\frac{x}{y}]$ — część całkowita z dzielenia x przez y (przyjmujemy, że $[\frac{x}{0}] = x$);
- (21) $\mathrm{rest}(x, y)$ — reszta z dzielenia x przez y (przyjmujemy, że $\mathrm{rest}(x, 0) = x$);
- (22) $\tau(x)$ — liczba dzielników liczby x, gdzie $\tau(0) = 0$;
- (23) $\sigma(x)$ — suma dzielników liczby x, gdzie $\sigma(0) = 0$;
- (24) $\mathrm{lh}(x)$ — liczba dzielników liczby x, które są liczbami pierwszymi (przyjmujemy $\mathrm{lh}(0) = 0$);
- (25) $\pi(x)$ — liczba liczb pierwszych nie większych niż x;
- (26) $k(x, y)$ — najmniejsza wspólna wielokrotność liczb x i y, gdzie $k(x, 0) = k(0, y) = 0$;
- (27) $d(x, y)$ — największy wspólny dzielnik liczb x i y, gdzie $d(0, 0) = 0$.

Przykłady funkcji pierwotnie rekurencyjnych

(20) $[\frac{x}{y}] = \sum_{i=1}^{x} \overline{\mathrm{sg}}(i \cdot y \dot{-} x)$.

(21) $\mathrm{rest}\,(x, y) = x \dot{-} y \cdot [\frac{x}{y}]$.

(22) $\tau(x) = \sum_{i=1}^{x} \overline{\mathrm{sg}}\,(\mathrm{rest}\,(x, i))$.

(23) $\sigma(x) = \sum_{i=1}^{x} i \cdot \overline{\mathrm{sg}}\,(\mathrm{rest}\,(x, i))$.

(24) x jest liczbą pierwszą gdy $\tau(x) = 2$ (zob. (22));

$\mathrm{lh}\,(x) = \sum_{i=1}^{x} \overline{\mathrm{sg}}\,(|\tau(i) - 2| + \mathrm{rest}\,(x, i))$.

(25) $\pi(x) = \sum_{i=1}^{x} \overline{\mathrm{sg}}\,(|\tau(i) - 2|)$ (zob. (22)).

(26) $k(x, y) = \mu z_{\leqslant x \cdot y}(z \cdot \overline{\mathrm{sg}}\,(x \cdot y) + \mathrm{sg}(x \cdot y)(\overline{\mathrm{sg}}(z) +$
$+ \mathrm{rest}\,(z, x) + \mathrm{rest}\,(z, y)) = 0)$.

(27) $d(x, y) = [\frac{xy}{k(x,y)}] + x \cdot \overline{\mathrm{sg}}(y) + y \cdot \overline{\mathrm{sg}}(x)$ (zob. (26)).

Przykłady funkcji pierwotnie rekurencyjnych

Następujące funkcje są pierwotnie rekurencyjne:

- (28) p_x – x-ta liczba pierwsza ($p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \ldots$);
- (29) $\mathrm{long}(x)$ – numer największego dzielnika liczby x, będącego liczbą pierwszą;
- (30) $\mathrm{ex}(x, y)$ – wykładnik potęgi x-tej liczby pierwszej p_x w kanonicznym rozkładzie liczby y na czynniki pierwsze; przyjmujemy, że $\mathrm{ex}(x, 0) = 0$;

Dowód.

- (28) $p_x = \mu y_{\leqslant 2^{2^x}}(|\pi(y) - (x+1)| = 0)$ (zob. (25)).
- (29) $\mathrm{long}\,(x) = \mu y_{\leqslant x}(\sum\limits_{i=y+1}^{x} \overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{rest}\,(x, p_i)) = 0)$.
- (30) $\mathrm{ex}\,(x, y) = \mu z_{\leqslant x}((\overline{\mathrm{sg}}\,(\mathrm{rest}\,(y, (p_x)^{z+1}))) \cdot \mathrm{sg}(y) = 0)$ (zob. (28)).

Przykłady funkcji pierwotnie rekurencyjnych

- Jest nieskończenie wiele funkcji pierwotnie (częściowo, ogólnie) rekurencyjnych.
- Każda z tych klas zawiera jednak tylko $\aleph_0$ funkcji.
- Ponieważ ***wszystkich*** funkcji z ω^n w ω jest ***kontinuum***, więc ***prawie wszystkie*** funkcje są poza klasą funkcji ogólnie rekurencyjnych.

- Przykłady funkcji, które:
  - są rekurencyjne, ale nie sa pierwotnie rekurencyjne,
  - nie są rekurencyjne,

zostaną podane niżej. Czy spotkałaś już funkcję, która nie jest rekurencyjna? Na czym miałoby polegać ***obliczanie*** jej wartości?

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnych

Następujące relacje są pierwotnie rekurencyjne:

- (a) $x = y$;
- (b) $x + y = z$;
- (c) $x \cdot y = z$;
- (d) x dzieli y;
- (e) x jest parzyste;
- (f) x oraz y są względnie pierwsze;
- (g) $\exists n(x = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$;
- (h) $\exists n(x = 1 + 2 + \ldots + n)$.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnych

Jeżeli relacje $P(x_1, \ldots, x_n)$ oraz $Q(x_1, \ldots, x_n)$ są rekurencyjne (pierwotnie rekurencyjne), to następujące relacje są również rekurencyjne (pierwotnie rekurencyjne):

- (a) $(P(x_1, \ldots, x_n) \wedge Q(x_1, \ldots, x_n))$;
- (b) $(P(x_1, \ldots, x_n) \vee Q(x_1, \ldots, x_n))$;
- (c) $\neg P(x_1, \ldots, x_n)$;
- (d) $(P(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow Q(x_1, \ldots, x_n))$;
- (e) $P(x_1, x_1, x_3, \ldots, x_n)$;
- (f) $P(f(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1})$, jeśli $f(x_1, \ldots, x_m)$ jest rekurencyjna (pierwotnie rekurencyjna).

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnych

- Jeżeli relacja $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ jest rekurencyjna (pierwotnie rekurencyjna), to relacje $\exists y(y \leqslant z \wedge R(x_1, \ldots, x_n, y))$ oraz $\forall y(y \leqslant z \rightarrow R(x_1, \ldots, x_n, y))$ również są rekurencyjne (pierwotnie rekurencyjne).
- Dowolny skończony zbiór liczb naturalnych jest pierwotnie rekurencyjny.
- Jeżeli f jest funkcją ogólnie rekurencyjną (pierwotnie rekurencyjną), zaś a jest ustaloną liczbą, to zbiór rozwiązań równania $f(x_1, \ldots, x_n) = a$ jest rekurencyjny (pierwotnie rekurencyjny).
- Niech f będzie funkcją częściowo, ale nie ogólnie rekurencyjną. Wtedy dziedzina funkcji f^{-1} jest zbiorem pierwotnie rekurencyjnym.
- Jeżeli zbiory A oraz B są rekurencyjne (pierwotnie rekurencyjne), to również zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $\omega - A$ są rekurencyjne (pierwotnie rekurencyjne).

Funkcja numerująca Cantora

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & (0,0) & & & & \\
 & & & (1,0) & & (0,1) & & & \\
 & & (2,0) & & (1,1) & & (0,2) & & \\
 & (3,0) & & (2,1) & & (1,2) & & (0,3) & \\
(4,0) & & (3,1) & & (2,2) & & (1,3) & & (0,4) \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Ustawimy te wszystkie pary w ***jeden*** ciąg nieskończony, wedle porządku pięter tej nieskończonej piramidy (z góry w dół), a w ramach każdego piętra od prawej do lewej. Zauważ, że każde piętro składa się z par (x, y) o stałej sumie $x + y$.

Funkcja numerująca Cantora

Funkcja numerująca Cantora

$$c(x,y) = \left(\sum_{i<x+y}(i+1)\right) + x = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}$$

ustanawia wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między $\omega \times \omega$ a ω (koduje pary liczb naturalnych wedle wspomnianego wyżej porządku).

Funkcja c jest pierwotnie rekurencyjna. Takie są też funkcje:

$l(x) = \mu z \leqslant x \, (\exists t \leqslant x \; c(z,t) = x)$
$r(x) = \mu z \leqslant x \, (\exists t \leqslant x \; c(t,z) = x)$.

Nadto, $l(c(x,y)) = x$ oraz $r(c(x,y)) = y$, a także $c(l(z), r(z)) = z$. Funkcje l oraz r również są wzajemnie jednoznaczne.

Funkcja numerująca Cantora

Analogicznie kodujemy trójki liczb naturalnych: $c^3(x, y, z) = c(x, c(y, z))$ oraz dowolne n-tki takich liczb:

- $c^1(x) = x$
- $c^2(x_1, x_2) = c(x_1, x_2)$
- $c^{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = c^n(x_1, x_2, \ldots, c(x_n, x_{n+1}))$.

Istnieje wiele innych funkcji kodujących. O niektórych z nich opowiemy podczas dalszych wykładów.

Funkcja numerująca Cantora

- Funkcje c^n oraz c^n_m są pierwotnie rekurencyjne.
- Funkcje $c^n(x_1, \ldots, x_n)$ ustanawiają wzajemnie jednoznaczne odpowiedniości między ω^n oraz ω (kodują ciągi liczb naturalnych długości n).
- Z jednoargumentowych funkcji częściowo rekurencyjnych oraz z funkcji $c^n(x_1, \ldots, x_n)$ otrzymać można wszystkie funkcje częściowo rekurencyjne.
- Istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja pierwotnie rekurencyjna ze zbioru ***wszystkich ciągów skończonych*** liczb naturalnych w zbiór ω.

Jedną z zalet kodowania z użyciem funkcji Cantora jest to, że jej zbiór wartości jest równy całemu zbiorowi ω.

Funkcje uniwersalne

Dla każdej liczby naturalnej n istnieją funkcje uniwersalne dla klas wszystkich n-argumentowych funkcji:

- pierwotnie rekurencyjnych;
- ogólnie rekurencyjnych.

Można udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje ***ogólnie rekurencyjna*** funkcja uniwersalna dla klasy wszystkich n-argumentowych funkcji pierwotnie rekurencyjnych. W dowodzie tego twierdzenia wykorzystuje się możliwość kodowania liczb naturalnych. W szczególności, wykazuje się, że zakodować można: definiowanie przez schemat rekursji prostej, definiowanie przez złożenie oraz definiowanie przez operację minimum efektywnego.

Funkcje uniwersalne

Twierdzenie A. Nie istnieje funkcja pierwotnie rekurencyjna uniwersalna dla rodziny wszystkich n-argumentowych funkcji pierwotnie rekurencyjnych.

Twierdzenie B. Nie istnieje funkcja częściowo rekurencyjna uniwersalna dla rodziny wszystkich n-argumentowych funkcji ogólnie rekurencyjnych.

Dowód A. Niech $F(t, x_1, \ldots, x_n)$ będzie funkcją uniwersalną dla rodziny wszystkich n-argumentowych funkcji pierwotnie rekurencyjnych i ***przypuśćmy***, że jest ona pierwotnie rekurencyjna. Wtedy $f(x_1, \ldots, x_n) = 1 + F(x_1, x_1, \ldots, x_n) = F(t_0, x_1, \ldots, x_n)$ dla pewnego t_0. Stąd $1 + F(t_0, t_0, \ldots, t_0) = F(t_0, t_0, \ldots, t_0)$. Dochodzimy do sprzeczności.

Dowód B. Zauważmy, że funkcja uniwersalna powinna być wszędzie określona, tzn. całkowita. Dalej, zobacz dowód Twierdzenia A.

Funkcje uniwersalne

Tak więc, choć można skonstruować funkcje uniwersalne dla rodziny wszystkich n-argumentowych funkcji:

- pierwotnie rekurencyjnych;
- ogólnie rekurencyjnych,

to z powyższych twierdzeń A i B otrzymujemy przykłady $(n+1)$-argumentowych funkcji, które ***nie*** są:

- pierwotnie rekurencyjne;
- ogólnie rekurencyjne.

Inna metoda pokazywania, iż jakaś funkcja nie należy do określonej klasy funkcji to dowód, że funkcja ta „rośnie szybciej" niż każda z funkcji tej klasy. W ten sposób pokazuje się np., że funkcja Ackermanna nie jest funkcją pierwotnie rekurencyjną (zob. niżej).

Funkcje elementarnie rekurencyjne

Klasa funkcji ***elementarnie rekurencyjnych*** to najmniejsza klasa funkcji zawierająca funkcje:

- odejmowania $\dot{-}$,
- funkcję wykładniczą,
- funkcję następnika,

oraz zamknięta ze względu na operacje:

- złożenia,
- minimum ograniczonego.

Można udowodnić, że klasa wszystkich funkcji elementarnie rekurencyjnych jest zawarta w klasie wszystkich funkcji pierwotnie rekurencyjnych (i ta inkluzja jest właściwa).

Hierarchia Grzegorczyka

Hierarchia Grzegorczyka. Niech: $f_0(x, y) = y + 1$, $f_1(x, y) = x + y$, $f_2(x, y) = (x + 1) \cdot (y + 1)$, i dla $n \geqslant 2$:
$f_{n+1}(0, y) = f_n(x + 1, y + 1)$
$f_{n+1}(x + 1, y) = f_{n+1}(x, f_{n+1}(x, y))$.

Dla dowolnego n niech E_n będzie najmniejszą klasą funkcji zawierającą funkcje: I_1^2, I_2^2, funkcję następnika oraz funkcję f_n i zamkniętą ze względu na złożenie i schemat rekursji ograniczonej. Wtedy:

- E_3 jest równa klasie funkcji elementarnie rekurencyjnych;
- dla każdego n mamy: $E_n \subset E_{n+1}$ (wszystkie inkluzje właściwe);
- $\bigcup\limits_n E_n$ jest równy klasie wszystkich funkcji pierwotnie rekurencyjnych;
- dla każdego n funkcje f_n są ściśle rosnące względem każdego z argumentów;
- dla każdego n funkcja $f_{n+1}(x, x)$ należy do $E_{n+1} - E_n$.

Funkcja Ackermanna

Mówimy, że funkcja $f(x)$ ***majoryzuje*** funkcję $g(x_1, \ldots, x_n)$, gdy istnieje liczba a taka, że dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n$:
$g(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(\max(x_1, \ldots, x_n, a))$.
W szczególności, jeśli f jest ściśle rosnąca, to $f(x)$ majoryzuje $g(x_1, \ldots, x_n)$ dokładnie wtedy, gdy $g(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(\max(x_1, \ldots, x_n))$ dla wszystkich, oprócz skończonej liczby, ciągów $(x_1, \ldots, x_n)$.

- Podamy przykład funkcji, która majoryzuje wszystkie funkcje pierwotnie rekurencyjne: ***funkcji Ackermanna***. Dowodzi się, że:
- Funkcja Ackermanna nie jest pierwotnie rekurencyjna (właśnie dlatego, że majoryzuje wszystkie funkcje pierwotnie rekurencyjne).
- Funkcja Ackermanna jest rekurencyjna.

Funkcja Ackermanna

Dla dowolnych $m > 0$ oraz $n > 0$ niech:

- $Ack(0, n) = n + 1$
- $Ack(m, 0) = Ack(m - 1, 1)$
- $Ack(m, n) = Ack(m - 1, Ack(m, n - 1))$.

Wprowadźmy też oznaczenia:

- $A_m(n) = A(m, n)$
- $A(n) = A_n(n)$ (czyli $A(n) = Ack(n, n)$).

Funkcję $A(n)$ nazywamy ***funkcją Ackermanna***.

Wspomnienia ze szkoły

Pisząc dalej a^{b^c} mamy na myśli funkcję $a^{(b^c)}$ (a nie funkcję $(a^b)^c$ — sprawdź, że to różne funkcje!). Podobnie, $a^{b^{c^d}}$ to $a^{(b^{(c^d)})}$, itd.
Zdefiniujemy teraz funkcję ${}^b a$ przez warunki:

- ${}^0 a = 1$
- ${}^{(b+1)} a = a^{({}^b a)}$.

Wtedy:

- ${}^1 a = a^{({}^0 a)} = a^1 = a$
- ${}^2 a = a^{({}^1 a)} = a^a$
- ${}^3 a = a^{({}^2 a)} = a^{a^a}$
- ${}^n a = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ (a występuje n razy).

Notacja strzałkowa Knutha

- $a \cdot b = a + a + \ldots + a$ (a występuje b razy)
- $a^b = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (a występuje b razy)
- ${}^b a = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ (a występuje b razy).

W literaturze wprowadza się oznaczenia:

- $a \uparrow b = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (a występuje b razy)
- $a \uparrow\uparrow b = a \uparrow (a \uparrow (\ldots \uparrow a) \ldots)$ (a występuje b razy)
- a zatem $a \uparrow\uparrow b = {}^b a = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ (a występuje b razy)
- $a \uparrow\uparrow\uparrow b = a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\ldots (a \uparrow\uparrow a) \ldots))$ (a występuje b razy)
- $a \uparrow^m b = a \uparrow^{m-1} (a \uparrow^{m-1} \ldots (a \uparrow^{m-1} a) \ldots)$ (a występuje b razy).

Notacja strzałkowa Knutha

Formalnie ciąg funkcji $\uparrow^n$ określamy w następujący sposób:

- $a \uparrow^n b = a^b$, gdy $n = 1$,
- $a \uparrow^n b = 1$, gdy $b = 0$,
- $a \uparrow^n b = a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b - 1))$, gdy $n > 1$.

Można pokazać, że np.:

- $1 \uparrow^n b = 1$
- $a \uparrow^n 1 = a$
- $2 \uparrow^n 2 = 4$.

Uwaga. Możesz pisać $\uparrow^n (a, b)$ zamiast $a \uparrow^n b$, wtedy bodaj łatwiej dokonywać rachunków.

Notacja strzałkowa Knutha

Nietrudno też wykazać rachunkiem, że np.:

- $2 \uparrow^2 3 = 2 \uparrow (2 \uparrow 2) = 2 \uparrow 2^2 = 2 \uparrow 4 = 2^4 = 16$
- $2 \uparrow^3 3 = 2 \uparrow^2 (2 \uparrow^2 2) = 2 \uparrow^2 4 = 2 \uparrow (2 \uparrow (2 \uparrow 2)) =$
  $= 2 \uparrow (2 \uparrow 4) = 2 \uparrow (2^4) = 2 \uparrow 16 = 2^{16} = 65536$
- $3 \uparrow^2 2 = 3 \uparrow (3 \uparrow^2 1) = 3 \uparrow (3 \uparrow (3 \uparrow^2 0)) = 3 \uparrow (3 \uparrow 1) = 3 \uparrow 3 =$
  $= 3^3 = 27$
- $3 \uparrow^3 2 = 3 \uparrow^2 (3 \uparrow^3 1) = 3 \uparrow^2 (3 \uparrow^2 (3 \uparrow^3 0)) = 3 \uparrow^2 (3 \uparrow^2 1) =$
  $= 3 \uparrow^2 (3 \uparrow (3 \uparrow^2 0)) = 3 \uparrow^2 (3 \uparrow 1) = 3 \uparrow^2 3 = 3 \uparrow (3 \uparrow^2 2) =$
  $= 3 \uparrow 27 = 3^{27} = 7625597484987.$

Funkcja Ackermanna

Dla wszystkich n:

- $A_0(n) = n + 1$
- $A_1(n) = n + 2 = 2 + (n + 3) - 3$
- $A_2(n) = 2n + 3 = 2 \cdot (n + 3) - 3$
- $A_3(n) = 2^{n+3} - 3 = 2 \uparrow (n + 3) - 3$
- $A_4(n) = 2 \uparrow^2 (n + 3) - 3$
- $A_5(n) = 2 \uparrow^3 (n + 3) - 3$
- $A_m(n) = 2 \uparrow^{m-2} (n + 3) - 3$, dla $m > 2$.

Ponadto dla wszystkich $n \geqslant 1$:

- $A_4(n) = 2^{A_4(n-1)+3} - 3$.

Funkcja Ackermanna

Dla wszystkich $m > 0$ wartość $A_m(n)$ jest równa kolejno:

- $A_m(n) = A_{m-1}(A_m(n-1)) =$
- $= A_{m-1}(A_{m-1}(A_m(n-2))) =$
- $= A_{m-1}(A_{m-1}(A_{m-1}(A_m(n-3)))) =$
- $\ldots$
- $= A_{m-1}(A_{m-1}(\ldots A_{m-1}(A_m(0))\ldots)) =$
- $= A_{m-1}(A_{m-1}(\ldots A_{m-1}(A_{m-1}(1))\ldots))$ (tu mamy $n+1$ iteracji funkcji A_{m-1}).

Mamy ponadto: $A_1(1) = 2$, $A_2(1) = 3$, $A_3(1) = 13$, $A_4(1) = 65533$.

Funkcja Ackermanna

Inny wariant notacyjny otrzymujemy określając ciąg funkcji B_m:

- $B_0(n) = n + 1$
- $B_{m+1}(0) = B_m(1)$
- $B_{m+1}(n + 1) = B_m(B_{m+1}(n))$.

Wtedy:

- $B_1(n) = 2 + (n + 3) - 3$
- $B_2(n) = 2 \cdot (n + 3) - 3$
- $B_3(n) = 2 \uparrow (n + 3) - 3$
- $B_4(n) = 2 \uparrow^2 (n + 3) - 3$
- $B_m(n) = 2 \uparrow^{m-2} (n + 3) - 3$.

Funkcja Ackermanna

Zauważmy jeszcze, że jeśli określimy funkcję trójargumentową $Ac(k, m, n)$ następująco:

- $Ac(1, m, n) = m + n$
- $Ac(k + 1, m, 1) = m$
- $Ac(k + 1, m, n + 1) = Ac(k, m, Ac(k + 1, m, n))$,

to zachodzą następujące równości:

- $Ac(0, m, n) = m + n$
- $Ac(1, m, n) = m \cdot n$
- $Ac(2, m, n) = m^n = m \uparrow n$
- $Ac(3, m, n) = {}^n m = m \uparrow^2 n = m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{m}}}}}$ (m występuje tu n razy)
- $Ac(4, m, n) = m \uparrow^3 n$.

Funkcja Ackermanna

Funkcja $Ack(m, n)$ „rośnie bardzo szybko.” Wartość $Ack(4, 2)$ ma w zapisie dziesiętnym 19729 cyfr. Dla dowolnej n wartość $A(4, n)$ możemy zapisać też następująco:

- $Ack(4, n) = {}^{(n+3)}2 - 3$
- $Ack(4, n) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} - 3$ (liczba 2 występuje tu $n + 3$ razy).

Wartości $n \uparrow^n n$ nazywa się ***liczbami Ackermana***.

Zbiory i relacje rekurencyjnie przeliczalne

Zbiór n-tek M nazywamy ***rekurencyjnie przeliczalnym*** (***zbiorem r.e.***), jeśli istnieje $(n+1)$-argumentowa relacja pierwotnie rekurencyjna

$$R_M(x_1, \ldots, x_n, y)$$

spełniająca dla każdych $x_1, \ldots, x_n$ warunek:

$(x_1, \ldots, x_n) \in M$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists y\; R_M(x_1, \ldots, x_n, y)$

Zbiory i relacje rekurencyjnie przeliczalne stanowią matematyczne odpowiedniki pojęć ***pozytywnie obliczalnych***.

Zbiory i relacje rekurencyjnie przeliczalne

Mówimy, że relacja $R \subseteq \omega^n$ jest ***pozytywnie obliczalna*** wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego układu liczb naturalnych $a_1, \ldots, a_n$, jeżeli zachodzi $R(a_1, \ldots, a_n)$, to otrzymamy w skończonej liczbie z góry określonych kroków odpowiedź na pytanie: „Czy zachodzi $R(a_1, \ldots, a_n)$?". Jeżeli natomiast ***nie*** zachodzi $R(a_1, \ldots, a_n)$, to możemy nie uzyskać żadnej odpowiedzi na to pytanie.

Przykład. Klasyczny Rachunek Predykatów jest nierozstrzygalny. Nie istnieje efektywna metoda rozstrzygania, czy jakaś formuła języka tego rachunku jest jego tautologią. Klasyczny Rachunek Predykatów jest jednak ***półrozstrzygalny***: własność bycia tautologią tego rachunku jest pozytywnie obliczalna. Np. metoda ***tablic analitycznych*** pozwala, gdy jakaś formuła jest tautologią tego rachunku, dowieść tego w sposób efektywny.

Zbiory i relacje rekurencyjnie przeliczalne

Dla dowolnego zbioru n-tek M zdefiniujemy ***częściową funkcję charakterystyczną*** $\chi_M^*(x_1, \ldots, x_n)$ w sposób następujący:

$$\chi_M^*(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in M, \\ \text{nie określona}, & \text{gdy} \quad (x_1, \ldots, x_n) \notin M. \end{cases}$$

Jeżeli f jest n-argumentową funkcją częściową, to zbiór

$$\Gamma_f = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) : (x_1, \ldots, x_n) \in dom(f)\}$$

nazywamy ***wykresem*** funkcji f.

Funkcję $f(x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy ***dookreśleniem*** funkcji $g(x_1, \ldots, x_n)$, jeśli $\Gamma_g \subseteq \Gamma_f$ oraz $dom(f) = \omega$.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

Podajemy (bez dowodów) niektóre wybrane własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych:

- Jeżeli relacja $R(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ jest pierwotnie rekurencyjna, to $M = \{(x_1, \ldots, x_n) : \exists y \exists z R(x_1, \ldots, x_n, y, z)\}$ jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.
- Jeżeli zbiory A i B są rekurencyjnie przeliczalne, to zbiory $A \cap B$ i $A \cup B$ też są rekurencyjnie przeliczalne.
- Każdy zbiór pierwotnie rekurencyjny jest rekurencyjnie przeliczalny.
- Niech zbiory A i B różnią się skończoną liczbą elementów. Wtedy:
  - (a) jeśli A jest rekurencyjny, to B jest rekurencyjny;
  - (b) jeśli A jest rekurencyjnie przeliczalny, to B jest rekurencyjnie przeliczalny.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- **Twierdzenie Posta**. Jeżeli zbiór A oraz jego dopełnienie $\omega - A$ są rekurencyjnie przeliczalne, to A jest rekurencyjny.
- Niech $M \subseteq \omega^n$. Przyjmijmy:

$$c^n(M) = \{c^n(x_1, \ldots, x_n) : (x_1, \ldots, x_n) \in M\},$$

gdzie c^n jest funkcją Cantora kodującą ciągi, zdefiniowaną wcześniej. Wtedy:

  - (a) M jest pierwotnie rekurencyjny wtedy i tylko wtedy, gdy $c^n(M)$ jest pierwotnie rekurencyjny;
  - (b) M jest rekurencyjny wtedy i tylko wtedy, gdy $c^n(M)$ jest rekurencyjny;
  - (c) M jest rekurencyjnie przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy $c^n(M)$ jest rekurencyjnie przeliczalny.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Niech $M \subseteq \omega$ będzie zbiorem niepustym. M jest rekurencyjnie przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja pierwotnie rekurencyjna $f(x)$ taka, że $M = \{f(x) : x \in \omega\}$.
- Niech M będzie niepustym zbiorem n-tek. Wtedy zbiór M jest rekurencyjnie przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją jednoargumentowe funkcje pierwotnie rekurencyjne $f_1, \ldots, f_n$ takie, że:

$$M = \{(f_1(x), \ldots, f_n(x)) : x \in \omega\}.$$

- Niech funkcja ogólnie rekurencyjna $f(x)$ spełnia warunek: $f(x) \geqslant x$ dla wszystkich $x \in \omega$. Wtedy zbiór wartości $rng(f)$ funkcji f jest rekurencyjny.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Zbiór nieskończony A jest rekurencyjny wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem wartości ściśle rosnącej funkcji ogólnie rekurencyjnej.
- Niepusty zbiór A jest rekurencyjny wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem wartości rosnącej (niekoniecznie ściśle) funkcji ogólnie rekurencyjnej.
- Każdy nieskończony zbiór rekurencyjnie przeliczalny zawiera nieskończony zbiór rekurencyjny.
- Każdy nieskończony zbiór rekurencyjnie przeliczalny daje się przedstawić w postaci $A = rng(f)$, dla pewnej wzajemnie jednoznacznej funkcji ogólnie rekurencyjnej f.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Wykres funkcji ogólnie rekurencyjnej jest zbiorem rekurencyjnym.
- Jeśli wykres Γ_f funkcji f jest rekurencyjnie przeliczalny, to funkcja f jest częściowo rekurencyjna.
- Przeciwobraz zbioru rekurencyjnego względem funkcji ogólnie rekurencyjnej jest rekurencyjny.
- Niech A będzie zbiorem rekurencyjnym, f funkcją ogólnie rekurencyjną i przy tym niech $rng(f) = \omega$, $f(A) \cap f(\omega - A) = \emptyset$. Wtedy $f(A)$ jest rekurencyjny.
- Niech A, B będą zbiorami rekurencyjnie przeliczalnymi, zaś C zbiorem rekurencyjnym takim, że $A \cap B = \emptyset$, $A \subseteq C \subseteq A \cup B$. Wtedy A jest rekurencyjny.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Niech A, B będą zbiorami rekurencyjnie przeliczalnymi. Wtedy istnieją zbiory rekurencyjnie przeliczalne $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$ takie, że $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A_1 \cup B_1 = A \cup B$.
- Można udowodnić, że:
  - (a) funkcja otrzymana za pomocą złożenia z funkcji o wykresie rekurencyjnie przeliczalnym ma wykres rekurencyjnie przeliczalny;
  - (b) funkcja utworzona za pomocą schematu rekursji prostej z funkcji o wykresie rekurencyjnie przeliczalnym ma wykres rekurencyjnie przeliczalny;
  - (c) funkcja utworzona z pomocą μ-operatora z funkcji o wykresie rekurencyjnie przeliczalnym ma wykres rekurencyjnie przeliczalny;
  - (d) wykres dowolnej funkcji częściowo rekurencyjnej jest rekurencyjnie przeliczalny.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Funkcja jest częściowo rekurencyjna wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres jest rekurencyjnie przeliczalny.
- Dziedzina funkcji częściowo rekurencyjnej jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.
- Zbiór wartości funkcji częściowo rekurencyjnej jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.
- Każdy zbiór rekurencyjny jest rekurencyjnie przeliczalny.
- Zbiór n-tek jest rekurencyjnie przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego funkcja charakterystyczna jest częściowo rekurencyjna.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Można udowodnić, że:
  - (a) obraz zbioru rekurencyjnie przeliczalnego względem funkcji częściowo rekurencyjnej jest rekurencyjnie przeliczalny;
  - (b) przeciwobraz zbioru rekurencyjnie przeliczalnego względem funkcji częściowo rekurencyjnej jest rekurencyjnie przeliczalny.
- Zbiór A rozwiązań równania

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a$$

  jest rekurencyjnie przeliczalny, jeśli f jest częściowo rekurencyjną funkcją n-argumentową.
- Jeśli f jest funkcją częściowo rekurencyjną, to zbiór $M = \{(x_1, \ldots, x_n) : \exists y\ f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\}$ jest rekurencyjnie przeliczalny.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

Niech $M_1, \ldots, M_n$ będą parami rozłącznymi rekurencyjnie przeliczalnymi zbiorami n-tek, a $f_1, \ldots, f_k$ częściowo rekurencyjnymi funkcjami n-argumentowymi. Wtedy funkcja g zdefiniowana następująco:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{gdy} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in M_1, \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n), & \text{gdy} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in M_k, \\ \text{nie określona} & \qquad \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

jest częściowo rekurencyjna.

- Funkcję częściową $f(x_1, \ldots, x_n)$ można przedstawić w postaci $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu t(g(x_1, \ldots, x_n, t) = 0)$ dla stosownej funkcji pierwotnie rekurencyjnej $g(x_1, \ldots, x_n, t)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wykres funkcji $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest pierwotnie rekurencyjny.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Niech $F(x,y)$ będzie funkcją zdefiniowaną z pomocą ***schematu rekursji względem dwu zmiennych***:

$$\begin{cases} F(0,y) = \varphi(y), \\ F(x+1,0) = \psi(x, F(x,\alpha(x)), F(x, F(x,\gamma(x)))), \\ F(x+1,y+1) = \tau(x,y,F(x,F(x+1,y))). \end{cases}$$

- Wtedy, jeśli funkcje $\varphi, \psi, \alpha, \gamma, \tau$ są ogólnie rekurencyjne, to funkcja F jest ogólnie rekurencyjna.

- Jeśli dziedzina częściowo rekurencyjnej funkcji f jest zbiorem rekurencyjnym, to f ma rekurencyjne dookreślenie.
- Istnieje funkcja częściowo rekurencyjna $f(x)$, która nie ma ogólnie rekurencyjnego dookreślenia.

Własności zbiorów i relacji rekurencyjnie przeliczalnych

- Istnieje funkcja częściowo rekurencyjna $f(x)$, która nie daje się przedstawić w postaci $f(x) = \mu y(g(x, y) = 0)$ dla żadnej ogólnie rekurencyjnej funkcji g.
- Jeśli $V(n, x)$ jest częściowo rekurencyjną funkcją uniwersalną dla klasy wszystkich jednoargumentowych funkcji częściowo rekurencyjnych, to zbiór $M = \{x : V(x, x) = 0\}$ jest rekurencyjnie przeliczalny, ale nie jest rekurencyjny.
- Jeśli $V(n, x)$ jest częściowo rekurencyjną funkcją uniwersalną dla klasy wszystkich jednoargumentowych funkcji pierwotnie rekurencyjnych, to zbiór

  $$\boldsymbol{G} = \{n : V(n, x) \text{ jest ogólnie rekurencyjna}\}$$

  nie jest rekurencyjnie przeliczalny.

Wykorzystywana literatura polska

- Grzegorczyk, A. 1973. *Zarys logiki matematycznej.* PWN, Warszawa.
- Ławrow, I.A., Maksimowa, L.L. 2004. *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Moczurad, M. 2002. *Wybrane zagadnienia z teorii rekursji.* Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.
- Murawski, R. 2000^3. *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla.* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.

Wykorzystywana literatura obcojęzyczna

- Barwise, J. (ed.) 1977. *Handbook of mathematical logic.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York Oxford.
- Boolos, G.S., Burgess, J.P., Jeffrey, R.C. 2002. *Computability and logic.* Cambridge University Press, Cambridge.
- Cori, R., Lascar, D. 2001. *Mathematical Logic. A Course with Exercises.* Oxford University Press, Oxford.
- Cutland, N. 1980. *Computability. An introduction to recursive function theory.* Cambridge University Press, Cambridge.
- Hinman, P.G. 2005. *Fundamentals of Mathematical Logic.* A K Peters, Wellesley.
- Kleene, S.C. 1952. *Introduction to Metamathematics.* Wolters-Noordhoff Publishing — Groningen, North-Holland Publishing Company — Amsterdam Oxford, American-Elsevier Publishing Company, Inc. — New York.

Wykorzystywana literatura obcojęzyczna

- Mendelson, E. 1997. *Introduction to mathematical logic.* Chapman & Hall, London.
- Odifreddi, P.G. 1989. *Classical recursion theory.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Odifreddi, P.G. 1999. *Classical recursion theory, Vol. II.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Rogers, H. 1972. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* MIT Press, Cambridge.
- Shoenfield, J.R. 1967. *Mathematical logic.* Addison-Wesley, Reading, MA.
- Smullyan, R. 1993. *Recursion theory for metamathematics.* Oxford University Press.
- Soare, R.I. 1987. *Recursively enumerable sets and degrees.* Springer-Verlag, Berlin.