

# WYSOKI SĄDZIE!

*Czyli ABC sztuki dowodzenia*

# DZIŚ

W obliczu Wysokiego Sądu  
przeprowadzimy kilka spektakularnych dowodów wskazujących  
niezbicie, iż:

1. Cytowane wypowiedzi są/ nie są tautologiami,
2. Cytowane wypowiedzi są/nie są kontrtautologiami
3. Cytowane wypowiedzi są/nie są semantycznie sprzeczne
4. Prezentowany wniosek wynika logicznie z przesłanek



# PROCES

- ✓ 7 przestępców
- ✓ 7 postępowań
- ✓ 7 dowodów do przeprowadzenia



KONTRIAUTOLOGIKUS



ANTYIAUTOLOGIKUS



SPRZECZNIK



PRZESŁANKI



SPRZECZNIK



PRZESŁANKI



PRZESŁANKI

# SPRZECZNIK



SPRZECZNIK

*Winny jeśli wypowiada zbiór zdań semantycznie sprzecznych.*

*Zeznanie (jedyne jakie złożył):*

Nieprawda, że jeżeli będzie rządzić lewica, to Episkopat będzie zachwycony. Prezydent rozwiąże Sejm lub nie przyjmie dymisji rządu. Jeśli Prezydent rozwiąże Sejm, to nie będzie rządzić lewica. Episkopat będzie zachwycony, jeśli Prezydent nie przyjmie dymisji rządu.

(Pogonowski 2001)

# PRZESŁANKI

*Winny jeśli jego wina wynika z przestanek.*

*Przesłanki:*

1. Skoro, jeżeli znaleziono ślady opon, to podejrzany jest winny, to miał on współnika.
2. Podejrzany ma samochód, lub skoro ma prawo jazdy, to jeżeli znaleziono ślady opon, to jest winny
3. Podejrzany ma prawo jazdy i nie miał współnika
4. Podejrzany nie ma samochodu.

PRZESŁANKI

# PRZESŁANKI

*Winny jeśli jego wina wynika z przestank. Oskarżony Krzysztof T. pseudonim Wołowina.*

*Przesłanki:*

1. Podejrzane są 3 osoby: Rzeźnik, Wołowina i Koniokrad (i nikt więcej).
2. Rzeźnik nigdy nie pracuje sam.
3. Koniokrad jest niewinny.

(Pogonowski 2001)



PRZESŁANKI

# ANTYTAUTOLOGIKUS

*Winny jeśli jego zeznanie nie jest tautologią.*

*Zeznanie:*

Tomasz lub Robert są współwinni, jeżeli ja jestem winny, zawsze i tylko wtedy gdy, jeżeli i Tomasz i Robert są winni, to ja jestem niewinny.

ANTYTAUTOLOGIKUS



# KONTRTAUTOLOGIKUS

*Winny jeżeli każde wypowiedane przez niego zdanie jest kontrtautologią.*

*Zeznanie:*

Nie duszę moich ofiar lub strzelam do nich z pistoletu, zawsze i tylko wtedy gdy nieprawdą jest, że strzelam do ofiar z pistoletu, jeżeli wcześniej je udusiłem.

KONTRTAUTOLOGIKUS







# PRZESŁANKI

*Winny jeśli jego wina wynika z przestanek.  
Podejrzany Arkadiusz M. pseudonim: Franek.*

*Przesłanki:*

1. Jeżeli winny jest Antoni lub Barnaba, to winni są także Czesiek i Damian.
2. Jeżeli winny jest Czesiek lub Euzebiusz, to winni są także Franek i Gustaw.
3. Winni są Antoni i Ignacy, jeżeli przynajmniej jedno z dwojga: niewinny jest Franek lub winny jest Euzebiusz.

PRZESŁANKI

# SPRZECZNIK

*Winny jeśli wypowiada zbiór zdań semantycznie sprzecznych.*

*Zeznanie:*

Jeżeli ukradłem diamenty, to ukradłem też gotówkę lub złoto. Natomiast jeżeli ukradłem złoto, to ukradłem zarówno gotówkę jak i sprzęt AGD. Gdy aresztowała mnie policja miałem przy sobie wielki wór diamentów. Ale nie jestem pazerny, więc nie ukradłem ani sprzętu AGD ani gotówki.



SPRZECZNIK

## Bibliografia:

### *Zadania częściowo na podstawie:*

J. Pogonowski, *Logika matematyczna. Zadania semestru zimowego 2000-2001 oraz zadania egzaminacyjne.*, źródło:  
[www.logic.amu.edu.pl](http://www.logic.amu.edu.pl)

# SPRYTNY GANGSTER

*Czyli ABC logiki predykatów*

# PROBLEM POLICJI

- *PRL* ma nowego gangstera,
- Udało się go złapać,
- Złożył następujące zeznanie:

Popełniłem wszystkie przestępstwa z użyciem dwustronnego kilofa.

W ostatnim napadzie na bank użyto dwustronnego kilofa.

*Czy oskarżonego można na tej podstawie skazać za ostatni napad na bank?*

# PROBLEM POLICJI

W klasycznym rachunku zdań:

KRZ:

$$\frac{p}{q}$$
$$\frac{q}{r}$$

A więc **nie wynika**.

Podejrzanego nie można skazać.

# PROBLEM POLICJI

Kolejne zeznanie:

W naszym gangu są inteligentni mordercy.

*Czy wystarczy to by podejrzewać, że ktoś z  
gangu popełnił morderstwo?*

# PROBLEM POLICJI

W klasycznym rachunku zdań:

$p$  (*W naszym gangu są inteligentni mordercy*)

---

$r$  (*W naszym gangu jest przynajmniej jeden morderca*)

A więc **nie wynika**.

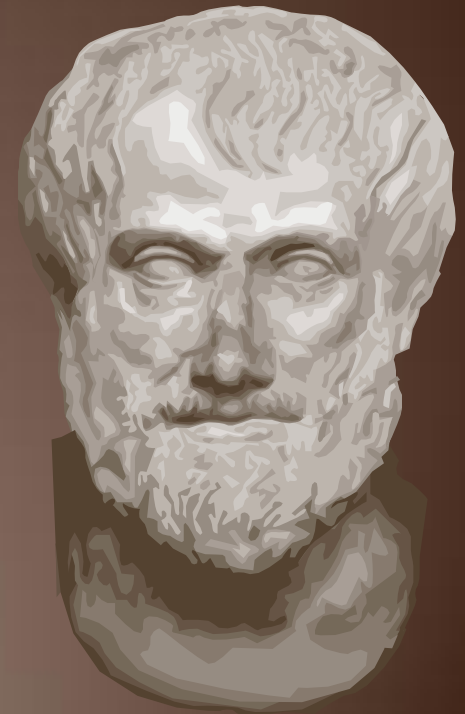
Podjezranego nie można skazać.



# WNIOSEK

Potrzebujemy narzędzia, które pomoże nam „uchwycić” te wnioski.

Będzie to *Klasyczny Rachunek Predykatów* (KRP), który zaprezentuje nam światowej klasy specjalista w tej sprawie **Predyktor Roztropny**



# PO CO MI TO?

Jeżeli Antoni jest gangsterem, to Antoni zginie od kuli.

Antoni jest gangsterem.

Antoni zginie od kuli.

*Intuicyjnie: Wynika*

KRZ:

$$\frac{p \rightarrow q}{p} \\ \hline q$$

**Wynika**

Antoni jest gangsterem.  
Wszyscy gangsterzy giną od kuli.

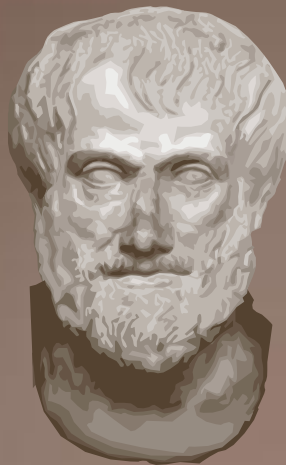
Antoni zginie od kuli.

*Intuicyjnie: Wynika*

KRZ:

$$\frac{p}{q} \\ \hline r$$

**Nie wynika**



# PO CO MI TO?

W KRZ:

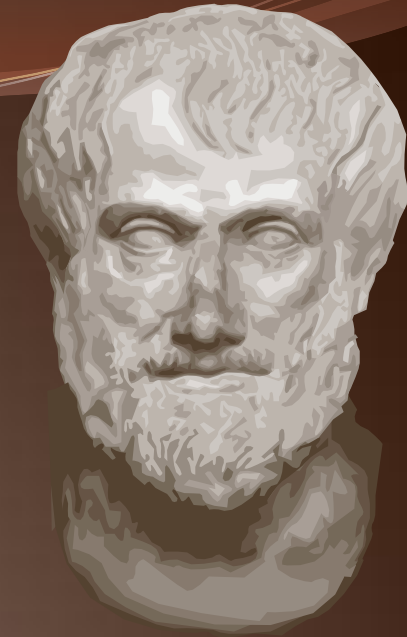
1. Kleofas jest gangsterem.
2. Janina jest gangsterem.
3. Ktoś jest gangsterem.
4. Wszyscy są gangsterami.

p

q

r

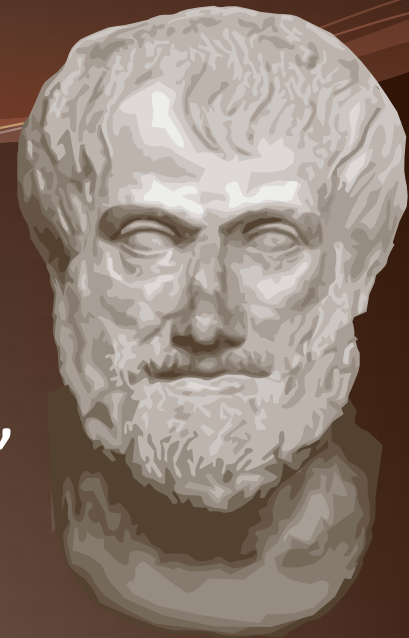
s



*A jednak:*

- ✓ Wszystkie te zdania orzekają o tej samej własności *bycia gangsterem*
- ✓ Orzekają więc to samo, choć o innych przedmiotach
- ✓ Zdania (1) i (2) orzekają coś o konkretnych indywidualnych osobach
- ✓ Zdania (3) i (4) orzekają ogólnie – o niektórych osobach lub o wszystkich osobach

# PO CO MI TO?



Właśnie po to, żeby „widzieć” te różnice,  
BO *logika predykatów*:

- ✓ Pozwala wniknąć w głąb zdań prostych
- ✓ „Zauważa”, że nawet zdania bez spójników prawdziwościowych mają złożoną strukturę
- ✓ Pozwala bardziej dokładnie oddawać sensy wyrażeń języka naturalnego

## PRZEKONANI?



### Symbole w *Klasycznym Rachunku Predykatów*:

1. Spójniki prawdziwościowe:  $\vee, \wedge, \equiv, \rightarrow, \neg$
2. *Zmienne indywidualowe*: reprezentują przedmioty danego rodzaju:  $x, y, z$
3. *Stałe (indywidualne)*:  $a, b, c$
4. *Predykaty*: nazwy własności lub stosunków, które przysługują przedmiotom danego rodzaju:  $P, Q, R...$
5. *Duży kwantyfikator*: oznaczający dla każdego  $\forall$
6. *Mały kwantyfikator*: oznaczający istnieje taki..., że  $\exists$

# SPRÓBUJMY Z POZNANYMI ZDANIAMI

- Antoni jest gangsterem.

$G(x)$  – predykat: *x jest gangsterem*

$a$  – stała indywidualna: Antoni

$G(a)$

- Wszyscy gangsterzy giną od kuli

$K(x)$  – predykat: *x ginie od kuli*

$\forall x (G(x) \rightarrow K(x))$

# SPRÓBUJMY Z POZNANYMI ZDANIAMI

W naszym gangu są inteligentni mordercy.

$G(x)$  – *predykat*:  $x$  jest w gangu

$I(x)$  – *predykat*:  $x$  jest inteligentny

$M(x)$  – *predykat*:  $x$  jest mordercą

$$\exists x (G(x) \wedge I(x) \wedge M(x))$$

# SPRÓBUJMY Z POZNANYMI ZDANIAMI

$G(x)$  – predykat: *x jest gangsterem*

1. Kleofas jest gangsterem.

$G(k)$

2. Janina jest gangsterem.

$G(j)$

3. Ktoś jest gangsterem.

$\exists x (G(x))$

4. Wszyscy są gangsterami.

$\forall x (G(x))$



# SPRÓBUJMY Z POZNANYMI ZDANIAMI

Popełniłem wszystkie przestępstwa z użyciem dwustronnego kilofa.

$p$  – stała indywidualna: *podejrzany*

$K(x)$  – *predykat*:  $x$  jest przestępstwem popełnionym z użyciem dwustronnego kilofa

$P(x,y)$  – *predykat*:  $x$  popełnił  $y$

$$\forall x(K(x) \rightarrow P(p,x))$$

W ostatnim napadzie na bank użyto dwustronnego kilofa.

$b$  – stała indywidualna: *ostatni napad na bank*

$$K(b)$$

# JESZCZE KILKA POJĘĆ



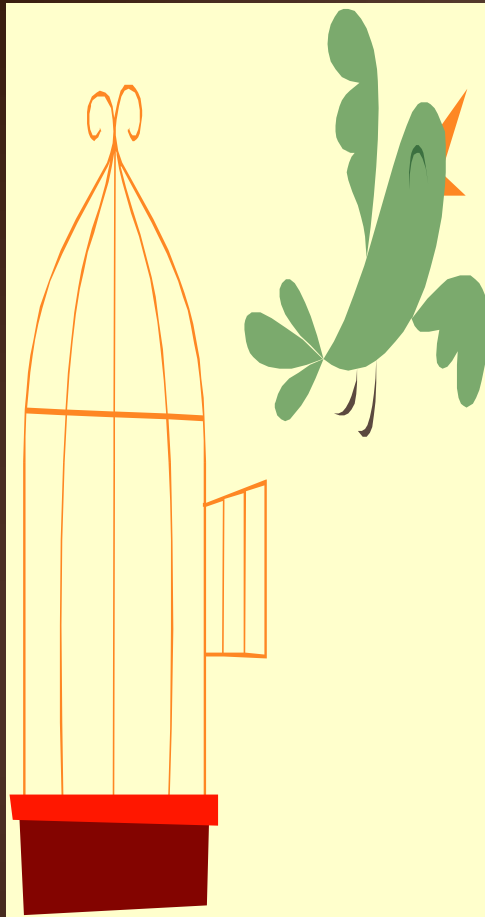
## ZMIENNA ZWIĄZANA:

„Zmienna występująca w funkcji zdaniowej, którą poprzedza kwantyfikator opatrzony symbolem tej zmiennej”

(Stanosz 1985)

Zmienna, której dotyczy przynajmniej jeden poprzedzający ją kwantyfikator.

# JESZCZE KILKA POJĘĆ



## ZMIENNA WOLNA

„Zmienna, która nie jest w danym wyrażeniu związana przez żaden kwantyfikator”

(Stanosz 1985)

Zmienna, której nie dotyczy żaden pojawiający się przed nią kwantyfikator.

# JESZCZE KILKA POJĘĆ



## ZASIĘG KWANTYFIKATORA:

„Wyrażenie  $\alpha$  w dowolnej formule postaci  $\forall x_n(\alpha)$  lub  $\exists x_n(\alpha)$  nazywamy zasięgiem odpowiedniego kwantyfikatora.”

(Pogonowski 2008)

# JESZCZE KILKA POJĘĆ



Kwantyfikatory wiążą mocniej niż spójniki zdaniowe,

*zatem*

*(w uproszczeniu)* jeżeli w danej formule **NIE** występują nawiasy, to kwantyfikatory wiążą tylko zmienne występujące bezpośrednio przy nich.



# PORA ĆWICZEŃ

Założmy, że każda zmienna w poniższych formułach odpowiada jednemu przestępcy.

Należy zwolnić tych, którzy nie są związani ;).

1.  $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$

2.  $\forall x (P(x,y) \rightarrow \exists y (Q(x) \wedge R(x,y)))$

3.  $\exists x (P(x) \wedge \forall z (Q(z) \rightarrow R(x,z)))$

4.  $\exists x (P(x) \wedge \forall y (Q(y) \rightarrow R(x,y)))$

5.  $\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow \neg (R(x) \wedge S(y))$



# PORA ĆWICZEŃ

Aby zмагаć się dalej z *PRL* musimy umieć przekładać na zapis logiczny ich *nowe, sprytniejsze zdania*:

1. Każdy popełnił przestępstwo.
2. Nie wszyscy są uczciwymi obywatelami
3. Nikt nie jest bez winy.
4. Niektórzy są bezwzględnyimi przestępcami.



# PORA ĆWICZEŃ

Pora na nieco trudniejsze przykłady:

1. Pospolici Złodzieje biegają szybciej od Prawdziwych Mafiosów, ale Prawdziwi Mafiosi żyją dłużej od nich.
2. Niektórzy Smutni Mordercy płaczą głośniej od jakichkolwiek Wesółych Dusicieli.
3. Jeśli Pospolici Złodzieje biegają szybciej od Prawdziwych Mafiosów, to ich okradają.
4. Niektórzy Ponurzy Włamywacze są bardziej podobni do pewnych Specjalistów od Mokrej Roboty niż do jakichkolwiek Pospolitych Złodziei.