Matematyczne Podstawy Kognitywistyki

Zaliczenie Wykładu: 26.I.2017

Kognitywistyka UAM, 2016–2017

Imię i nazwisko:. . . . . Pogromcy Hydr Lernejskich

1. Pokaż, że nie jest prawem rachunku zbiorów:

$$(A \cup C) - (B \cup C) = (A - B) \cap (C - B)$$

2. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{1 + 2 + 3 + \ldots + n}}{n}$$

3. Oblicz drugą pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

4. Znajdź w przedziale $[0, e]$ ekstrema lokalne funkcji:

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

5. Udowodnij Lemat Königa: jeśli drzewo $D = (X, R, x_0)$ rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.

Jerzy Pogonowski
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

MATEMATYCZNE PODSTAWY KOGNITYWISTYKI

ZALICZENIE WYKŁADU: 26.I.2017

KOGNITYWISTYKA UAM, 2016–2017

Imię i nazwisko:. . . . .   ŁOWCY LWÓW NEMEJSKICH

1. Pokaż, że nie jest prawem rachunku zbiorów:

$$(A - B) \cap (C - B) = (A - B) \cup (B - C)$$

2. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$a_n = n \cdot (\ln(n+1) - \ln n)$$

3. Oblicz drugą pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

4. Obwód prostokąta wynosi L. Przy jakich długościach boków prostokąt ten ma największe pole?

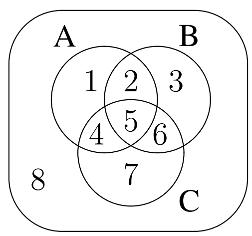
5. Udowodnij TWIERDZENIE CANTORA: żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

ROZWIĄZANIA

POGROMCY HYDR LERNEJSKICH

1. Zadanie można rozwiązać różnymi sposobami. Pokażemy rozwiązanie wykorzystujące diagramy Venna. Można narysować diagramy Venna dla lewej i prawej strony badanej równości i pokazać, że reprezentują one różne zbiory, zaznaczając np. różnymi kolorami brane pod uwagę obszary. Ponieważ jednak mamy pokazać, że rozważana równość ***nie*** zachodzi, więc zadanie jest łatwiejsze: umieścimy w każdej składowej diagramu Venna jakiś element (np. liczbę), obliczymy czemu równa jest wtedy lewa i prawa strona rozważanej równości i (jeżeli pytanie było uczciwe) dostaniemy w wyniku różne zbiory.



W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:

1. $A = \{1, 2, 4, 5\}$
2. $B = \{2, 3, 5, 6\}$
3. $C = \{4, 5, 6, 7\}$
4. $A \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$
5. $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
6. $(A \cup C) - (B \cup C) = \{1\}$
7. $A - B = \{1, 4\}$
8. $C - B = \{4, 7\}$

9. $(A-B)\cap(C-B)=\{4\}$
10. Widać zatem, że $(A\cup C)-(B\cup C)=\{1\}\neq\{4\}=(A-B)\cap(C-B)$.

Podaliśmy więc przykład zbiorów A, B, C, które nie spełniają równości

$$(A\cup C)-(B\cup C)=(A-B)\cap(C-B),$$

czyli wykazaliśmy, że równość ta nie jest prawem rachunku zbiorów.

2. To zadanie zawierało dwie niewinne pułapki:

1. Po pierwsze, skoro wyraz ogólny ciągu ma postać $a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+2+3+...+n}}{n}$, to oznacza to, iż *każdy* wyraz badanego ciągu ma wartość liczbową równą tej granicy, czyli (a_n) jest ciągiem stałym i jego granica jest równa wartości dowolnego wyrazu tego ciągu. Aby jednak ustalić tę wartość, trzeba obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym $b_n=\frac{\sqrt{1+2+3+...+n}}{n}$.
2. Po drugie, należało ustalić, czemu równa jest suma $1+2+3+\ldots+n$, czyli suma pierwszych n dodatnich liczb naturalnych. To można było ustalić na różne sposoby:

   (a) Wystarczy zauważyć, że mamy do czynienia z sumą n wyrazów ciągu arytmetycznego, którą oznaczmy przez s_n i zastosować znany ze szkoły wzór: $s_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$, czyli $s_n=\frac{1+n}{2}\cdot n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$

   (b) Można zastosować sprytną argumentację Gaussa, którą – wedle anegdoty – popisał się on w szkole: wypiszmy w jednym rzędzie liczby od 1 do n, a pod spodem te same liczby w odwrotnej kolejności:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

   Zauważmy teraz, że sumą każdej kolumny jest $n+1$, wszystkich kolumn jest n, i każda liczba powtarza się dwukrotnie w podanym wyliczeniu. A zatem suma $1+2+3+\ldots+n$ równa jest $(n+1)\cdot n\cdot\frac{1}{2}=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

   (c) Wreszcie, można było uzasadnić wzór $1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ przez indukcję matematyczną. Dla najmniejszej liczby z rozważanego zakresu, czyli dla $k=1$ wzór oczywiście zachodzi. Czynimy teraz

założenie indukcyjne: $1+2+3+\ldots+k = \frac{k\cdot(k+1)}{2}$. Musimy udowodnić, że wtedy: $1+2+3+\ldots+k+k+1 = \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$. Mamy:
$1+2+3+\ldots+k+k+1 = (1+2+3+\ldots+k)+k+1 = \frac{k\cdot(k+1)}{2}+k+1 = \frac{k\cdot(k+1)+2\cdot(k+1)}{2} = \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$.
Tak więc, dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n zachodzi wzór: $1+2+3+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Obliczamy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $b_n = \frac{\sqrt{1+2+3+\ldots+n}}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+2+3+\ldots+n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}{n^2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2+n}{2\cdot n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot n}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ponieważ $a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n, więc a_n jest ciągiem stałym o wartości $\frac{\sqrt{2}}{2}$, czyli granicą tego ciągu jest właśnie $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Słuchacze mogli również poczynić milczące założenie, że wykładowca wcale nie chciał zastawiać pierwszej z wymienionych pułapek, a po prostu chciał napisać: *Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym:* $a_n = \frac{\sqrt{1+2+3+\ldots+n}}{n}$. Jeśli ktoś ze słuchaczy poczynił takie założenie o domniemanych intencjach wykładowcy i poprawnie obliczył granicę tego ciągu, to jego rozwiązanie również było akceptowane. Wtedy oczywiście także mamy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Najpierw obliczamy pierwszą pochodną funkcji $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2-1)'\cdot(x^2+1)-(x^2-1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2\cdot x\cdot(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2\cdot x}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{2\cdot x^3+2\cdot x-2\cdot x^3+2\cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{4\cdot x}{(x^2+1)^2}.$$

Następnie obliczamy drugą pochodną badanej funkcji, również korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji:

$$f''(x) = \left(\frac{4\cdot x}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{(4\cdot x)'\cdot(x^2+1)^2-(4\cdot x)\cdot((x^2+1)^2)'}{(x^2+1)^4} = \frac{4\cdot(x^2+1)^2-4\cdot x\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2\cdot x}{(x^2+1)^4} =$$
$$= \frac{4\cdot(x^2+1)\cdot(x^2+1-4\cdot x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{4\cdot(1-3\cdot x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

4. Obliczamy pochodną funkcji $f(x) = \frac{e^x}{x}$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)'\cdot x-(x)'\cdot e^x}{x^2} = \frac{e^x\cdot x-e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}\cdot(x-1).$$

Widać zatem, że:

1. $f'(x) = 0$ dla $x = 1$

2. $f'(x) > 0$ dla $x > 1$, czyli f jest rosnąca dla $x > 1$

3. $f'(x) < 0$ dla $x < 1$, czyli f jest malejąca dla $x < 1$.

Funkcja $f(x) = \frac{e^x}{x}$ ma zatem minimum lokalne w punkcie $x = 1$. Mamy: $f(1) = \frac{e^1}{1} = e$. Pozostaje obliczenie granic jednostronnych funkcji f na krańcach badanego przedziału. Mamy:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = \infty$

2. $\lim\limits_{x\to e^-} \frac{e^x}{x} = \frac{e^e}{e} = e^{e-1}$.

Zauważamy, że funkcja $f(x) = \frac{e^x}{x}$ nie jest określona dla $x = 0$, czyli lewy kraniec przedziału domkniętego $[0, e]$ nie należy do dziedziny tej funkcji: dziedziną funkcji $f(x) = \frac{e^x}{x}$ jest $\mathbb{R} - \{0\}$. Gdybyśmy badali przebieg zmienności tej funkcji w całej jej dziedzinie (co nie było treścią pytania), to można ustalić np. że:

1. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$

2. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$

4. Osie układu współrzędnych są asymptotami wykresu tej funkcji.

5. Badana funkcja jest wklęsła w przedziale $(-\infty, 0)$ oraz wypukła w przedziale $(0, \infty)$.

5. LEMAT KÖNIGA. *Jeśli drzewo $D = (X, R, x_0)$ rzędu skończonego jest nieskończone, to ma gałąź nieskończoną.*

DOWÓD. Przypuśćmy, że D jest nieskończone. Zdefiniujemy gałąź nieskończoną $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w D przez indukcję matematyczną.

Element x_0 (czyli korzeń drzewa D) jest pierwszym elementem konstruowanej gałęzi. Ponieważ D jest nieskończone, więc x_0 ma nieskończenie wiele R-następników (bo wszystkie pozostałe wierzchołki drzewa są R-następnikami x_0). To krok początkowy indukcji.

Kolejne elementy konstruowanej gałęzi nieskończonej będziemy wybierali z kolejnych poziomów drzewa.

Przypuśćmy, że $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ zostały zdefiniowane tak, że x_i należy do i-tego poziomu drzewa D oraz x_i ma nieskończenie wiele R-następników (dla $0 \leqslant i < n$). To założenie indukcyjne. Trzeba teraz pokazać, że znajdziemy element x_n z n-tego poziomu drzewa D, który ma nieskończenie wiele R-następników i który dołączymy do konstruowanej gałęzi.

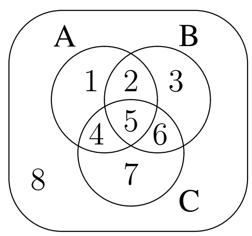
Z założenia (że drzewo D jest rzędu skończonego), x_{n-1} ma tylko skończenie wiele *bezpośrednich* R-następników i wszystkie te bezpośrednie R-następniki elementu x_{n-1} należą do n-tego poziomu drzewa D. Ponieważ x_{n-1} ma nieskończenie wiele R-następników, więc co najmniej jeden z jego bezpośrednich R-następników także ma nieskończenie wiele R-następników. Wybieramy więc element x_n z n-tego poziomu drzewa D o tej właśnie własności. Wtedy x_n ma nieskończenie wiele R-następników. Ponieważ jest tak dla każdego n, pokazaliśmy istnienie nieskończonej gałęzi $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ w drzewie D.

Na wykładzie podkreślano niekonstruktywny charakter tego dowodu: wybierając element x_n w sposób podany powyżej, korzystamy istotnie z *aksjomatu wyboru*.

Rozwiązania

Łowcy Lwów Nemejskich

1. Zadanie można rozwiązać różnymi sposobami. Pokażemy rozwiązanie wykorzystujące diagramy Venna. Można narysować diagramy Venna dla lewej i prawej strony badanej równości i pokazać, że reprezentują one różne zbiory, zaznaczając np. różnymi kolorami brane pod uwagę obszary. Ponieważ jednak mamy pokazać, że rozważana równość ***nie*** zachodzi, więc zadanie jest łatwiejsze: umieścimy w każdej składowej diagramu Venna jakiś element (np. liczbę), obliczymy czemu równa jest wtedy lewa i prawa strona rozważanej równości i (jeżeli pytanie było uczciwe) dostaniemy w wyniku różne zbiory.



W oznaczeniach tego diagramu mamy zatem:

1. $A = \{1, 2, 4, 5\}$
2. $B = \{2, 3, 5, 6\}$
3. $C = \{4, 5, 6, 7\}$
4. $A - B = \{1, 4\}$
5. $C - B = \{4, 7\}$
6. $(A - B) \cap (C - B) = \{4\}$
7. $A - B = \{1, 4\}$ (jak wyżej)
8. $B - C = \{2, 3\}$

9. $(A-B)\cup(B-C)=\{1,2,3,4\}$

10. Widać zatem, że
$(A-B)\cap(C-B)=\{4\}\neq\{1,2,3,4\}=(A-B)\cup(B-C)$.

Podaliśmy więc przykład zbiorów A, B, C, które nie spełniają równości

$$(A-B)\cap(C-B)=(A-B)\cup(B-C),$$

czyli wykazaliśmy, że równość ta nie jest prawem rachunku zbiorów.

2. To zadanie zawierało dwie niewinne pułapki:

1. Po pierwsze, trzeba było pamiętać, że $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$, o czym mówiono zarówno na wykładzie, jak i podczas konwersatorium. Nie było wymagane pamiętanie, jak ustalamy zbieżność ciągu $((1+\frac{1}{n})^n)$. Przypomnijmy jednak, że dowód, iż ciąg o wyrazie ogólnym $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ jest rosnący i ograniczony uzyskujemy, wykorzystując wzór dwumianowy Newtona dla $(1+\frac{1}{n})^n$ oraz nierówność $n!\geqslant 2^{n-1}$, która zachodzi dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$ (co łatwo wykazać przez indukcję matematyczną). Skoro ciąg o wyrazie ogólnym $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ jest rosnący i ograniczony, to jest on zbieżny i jego granicę oznaczamy właśnie przez e. Trzeba też pamiętać, że e jest podstawą logarytmu naturalnego, a zatem $\ln e=1$.

2. Po drugie, trzeba było odwołać się do ciągłości funkcji logarytmicznej, co było konieczne dla uzasadnienia faktu, iż $\ln\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n$ (logarytm naturalny z granicy ciągu równy jest granicy logarytmów naturalnych wyrazów tego ciągu).

Trzeba było również pamiętać, że różnica logarytmów z dwóch wielkości równa jest logarytmowi z ilorazu tych wielkości, a także że logarytm z n-tej potęgi wielkości x równy jest n razy logarytm z x. Te wiadomości słuchacze uzyskali w szkole.

Wiedząc to wszystko, obliczamy granicę ciągu (a_n):
$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot(\ln(n+1)-\ln n)=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\ln\frac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(\frac{n+1}{n})^n=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})^n=\ln\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\ln e=1.$

3. Najpierw obliczamy pierwszą pochodną funkcji $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji:

$f'(x) = (\frac{x^2}{x^2+1})' = \frac{(x^2)' \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2 \cdot x \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot 2 \cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{2 \cdot x}{(x^2+1)^2}$.

Następnie obliczamy drugą pochodną badanej funkcji, również korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji:

$f''(x) = (\frac{2 \cdot x}{(x^2+1)^2})' = \frac{(2 \cdot x)' \cdot (x^2+1)^2 - 2 \cdot x \cdot ((x^2+1)^2)'}{(x^2+1)^4} = \frac{2 \cdot (x^2+1)^2 - 2 \cdot x \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot 2 \cdot x}{(x^2+1)^4} =$

$= \frac{2 \cdot (x^2+1) \cdot (x^2+1-4 \cdot x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2 \cdot (1-3 \cdot x^2)}{(x^2+1)^3}$.

4. Mamy znaleźć długości boków prostokąta o obwodzie L, dla których pole tego prostokąta ma największą wartość.

Niech x oznacza długość jednego z boków prostokąta. Wtedy $\frac{L-2 \cdot x}{2}$ jest długością drugiego boku. Pole prostokąta podaje funkcja: $f(x) = x \cdot \frac{L-2 \cdot x}{2}$. Pytanie dotyczy więc znalezienia maksimum lokalnego tej funkcji w przedziale $(0, L)$. Obliczamy pochodną funkcji f:

$f'(x) = (x \cdot \frac{L-2 \cdot x}{2})' = \frac{1}{2} \cdot (L \cdot x - 2 \cdot x^2)' = \frac{1}{2} \cdot (L - 4 \cdot x)$

Mamy zatem:

1. $f'(x) = 0$ dla $x = \frac{L}{4}$
2. $f'(x) > 0$ dla $0 < x < \frac{L}{4}$, czyli f jest rosnąca dla $0 < x < \frac{L}{4}$
3. $f'(x) < 0$ dla $\frac{L}{4} < x < L$, czyli f jest malejąca dla $0 < x < \frac{L}{4}$.

Tak więc, funkcja f ma maksimum lokalne w punkcie $x = \frac{L}{4}$. Wtedy boki prostokąta mają długości:

1. $x = \frac{L}{4}$
2. $\frac{L-2 \cdot \frac{L}{4}}{2} = \frac{L}{4}$.

Prostokąt o obwodzie L i największym polu to kwadrat o boku długości $\frac{L}{4}$.

5. TWIERDZENIE CANTORA. *Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.*

DOWÓD. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Weźmy dowolny zbiór X i przypuśćmy, że X jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów $\wp(X)$. Oznacza to, iż istnieje bijekcja f ze zbioru X na zbiór $\wp(X)$. Określmy następujący element rodziny $\wp(X)$:

$$X_f = \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}.$$

Wtedy dla pewnego $x_f \in X$ musiałoby być: $f(x_f) = X_f$. Zapytajmy teraz: czy $x_f \in X_f$?

1. Jeśli $x_f \in X_f$, to $x_f \in \{x \in X : x \notin f(x)\}$, czyli $x_f \notin X_f$.

2. Jeśli $x_f \notin X_f$, to $x_f \notin \{x \in X : x \notin f(x)\}$, czyli $x_f \in \{x \in X :$ nieprawda, że $x \notin f(x)\} = \{x \in X : x \in f(x)\}$, a zatem $x_f \in X_f$.

Otrzymujemy zatem, iż: $x_f \in X_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_f \notin X_f$, a to jest *sprzeczność*. Musimy zatem odrzucić przypuszczenie o istnieniu funkcji f. W konsekwencji, nie istnieje bijekcja między X oraz $\wp(X)$, czyli X oraz $\wp(X)$ nie są równoliczne.

Wszystkie prace zaliczeniowe zostaną zarchiwizowane w pokoju 80. Każdy ze słuchaczy może obejrzeć swoją pracę w godzinach dyżuru wykładowcy.

Lektura prac słuchaczy skłania do kilku refleksji. Większość łatwo poradziła sobie z zadaniem pierwszym oraz (choć czasem z błędami rachunkowymi) z zadaniem trzecim. Niepokojąca okazała się nieznajomość pewnych elementarnych wiadomości i umiejętności omawianych w dydaktyce szkolnej (działania na logarytmach!). Martwi także to, że zaledwie kilka osób próbowało przeprowadzić dowód, wymagany w zadaniu piątym. Zachęcamy słuchaczy do treningu w uprawianiu dedukcji, w uzasadnianiu twierdzeń. Na dalszych latach studiów kognitywistycznych metody dedukcyjne będą intensywnie wykorzystywane. Ponadto, umiejętność uzasadniania twierdzeń jest cechą wymaganą w przypadku osoby, chcącej uchodzić za wykształconą.

JERZY POGONOWSKI
Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl